2.2.4 $(t-a)^{\beta}$ nın Riemann-Liouville Kesirli Türevi:

Şimdi, $\nu \epsilon IR$ olmak üzere

$$f(t) = (t-a)^{\upsilon}$$

kuvvet fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli türevi

$${}_aD_t^p((t-a)^{\upsilon}) = \frac{\Gamma(1+\upsilon)}{\Gamma(1+\upsilon-p)}(t-a)^{\upsilon-p}$$

dir.

2.2.5 Tamsayı Basamaktan Türevlerle Birleştirilmesi

Birçok uygulama probleminde Riemann-Liouville kesirli türevinin tamsayı basamaktan türevlerle birleştirilmesi görülmektedir.

Şimdi p reel basamaktan Riemann-Liouville kesirli türevinin n. basamaktan türevini ele alalım. Riemann-Liouville türevinin tanımını kullanarak

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dt^n}({}_aD_t^{k-\alpha}f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d^{n+k}}{dt^{n+k}}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau \\ &= {}_aD_t^{n+k-\alpha}f(t) \quad (0 < \alpha \leq 1)\end{aligned}$$

ve $p = k - \alpha$ alırsak

$$\frac{d^n}{dt^n}({}_aD_t^p f(t)) = {}_a D_t^{n+p} f(t)$$

elde ederiz.

Ayrıca

$$\begin{aligned}{}_aD_t^{-n}f^{(n)}(t) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}f^{(n)}(\tau)d\tau \\ &= f(t) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^j}{\Gamma(j+1)}\end{aligned}$$

ve

$${}_aD_t^p g(t) = {}_a D_t^{p+n}({}_aD_t^{-n}g(t))$$

dır.

${}_aD_t^p((t-a)^{\upsilon})$, ${}_aD_t^{-n}f^{(n)}(t)$ ve ${}_aD_t^p g(t) = {}_a D_t^{p+n}({}_aD_t^{-n}g(t))$ ifadelerini kullanırsak

$${}_aD_t^p(\frac{d^n f(t)}{dt^n}) == {}_a D_t^{p+n} f(t) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-p-n}}{\Gamma(1+j-p-n)}$$

elde ederiz. Böylece, Grünwald-Letnikov türevinde olduğu gibi, Riemann-Liouville kesirli türev operatörü ${}_aD_t^p$ de, $\frac{d^n}{dt^n}$ türev operatörüyle yer değiştirebilirdir. Yani

$$\frac{d^n}{dt^n}({}_aD_t^p f(t)) ={}_a D_t^p(\frac{d^n f(t)}{dt^n}) ={}_a D_t^{p+n} f(t)$$

dir ancak

$$f^{(k)}(a) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, ..., n-1)$$

koşulu sağlamalıdır.

2.2.6 Kesirli Türevlerle Birleştirilmesi:

Şimdi iki kesirli Riemann-Liouville kesirli türev operatörünün birleştirilmesini inceleyelim:

$${}_aD_t^p \ (m-1 \leq p < m) ve {}_aD_t^q \ (n-1 \leq q < n)$$

kesirli Riemann-Liouville türev operatörlerinin ardışık uygulamasını ele alalım:

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^p({}_aD_t^q f(t)) &= \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}_aD_t^{-(m-p)}({}_aD_t^p f(t))\right\} \\
&= \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}_aD_t^{p+q-m} f(t) - \sum_{j=1}^{n}\left[{}_aD_t^{q-j} f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{m-p-j}}{\Gamma(1+m-p-j)}\right\}
\end{aligned}$$

$${}_aD_t^p({}_aD_t^q f(t)) ={}_a D_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^{n}\left[{}_aD_t^{p-j} f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-p-j}}{\Gamma(1-p-j)}$$

elde ederiz.

p ve q nun yerleri değiştirilirse

$${}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) ={}_a D_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^{m}\left[{}_aD_t^{p-j} f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-q-j}}{\Gamma(1-q-j)}$$

buluruz.

Yukarıdaki özdeşlikler karşılaştırdığımızda, $p = q$ durumu dışında ${}_aD_t^p$ ve ${}_aD_t^q$ nun değiştirilmeyeceğini görürüz.