2.3 Diğer Bazı Yaklaşımlar:

Diferensiyel ve integral kavramlarının genelleştirilmesi için, diğer yaklaşımlar arasında, biz M.Caputo tarafından verilen yaklaşımı ve genelleşmiş fonksiyonlara dayanan yaklaşımı dikkate alacağız. Çünkü, bu yaklaşımlar uygulamalı problemlerin çözümlerinde daha kullanışlıdır.

2.3.1 Caputo Kesirli Türevi:

Riemann-Liouville kesirli türev tanımı, integral ve uygulamalı matematiğin uygulamalarında çok büyük bir rol oynamıştır.

Riemann-Liouville yaklaşımıyla, $t = a$ noktasındaki Riemann-Liouville kesirli türevinin limit değerlerini başlangıç koşulları oluşturmaktadır.Örneğin

$$\lim_{t\to a}\left[{}_aD_t^{\alpha-1}f(t)\right] = b_1$$

$$\lim_{t\to a}\left[{}_aD_t^{\alpha-2}f(t)\right] = b_2$$

$$\dots$$

$$\lim_{t\to a}\left[{}_aD_t^{\alpha-n}f(t)\right] = b_n$$

burada b_k $(k = 1, 2, ..., n)$ lar verilen sabitlerdir.

Kesirli diferensiyel tekniğinde, başlangıç koşullarını fiziksel durumlara en uygun şekilde veren Caputo olmuştur.

Caputo'nun tanımı

$${}_a^cD_t^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} \qquad ,(n-1 < \alpha < n)$$

ile verilir. Caputo yaklaşımının en temel avantajı, Caputo kesirli türevlerinin tamsayı basamaktan diferensiyel denklemlerinkiyle aynı formda başlangıç koşullarına sahip olmasıdır.

Riemann-Liouville kesirli türev ve Caputo kesirli türevi arasında bazı farklılıklar vardır. Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümünün formülü,

$$\int_0^\infty e^{-pt}\left\{{}_0D_t^{\alpha}f(t)\right\}dt = p^{\alpha}F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k.{}_0D_t^{\alpha-k-1}f(t)\Big|_{t=0}, \quad (n-1 \le \alpha < n)$$

Caputo türevinin Laplace dönüşümü ise

$$\int_0^\infty e^{-pt}\left\{{}_0^cD_t^{\alpha}f(t)\right\}dt = p^{\alpha}F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0), \quad (n-1 < \alpha \le n)$$

dır. Buradan da görülmektedir ki Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümü başlangıç koşullarının kullanımına izin vermektedir ki bu da problemin fiziksel yorumunu sağlamaktadır. Aksine, Caputo türevinin Laplace dönüşümü bilinen fiziksel yorumu ile klasik tamsayı basamaktan türevlerin başlangıç koşullarının kullanımına izin vermektedir.

Rieman-Liouville tanımı ve Caputo tanımı arasındaki diğer bir önemli fark ise, sabitin Caputo türevinin sıfır olmasına karşın C sabitinin Riemann-Liouville kesirli türevinin alt terminal noktası olan a daki sonlu değerinin sıfıra eşit olmasıdır.

Riemann-Liouville ve Caputo yaklaşımları arasındaki diğer bir önemli fark ise, Caputo türevi için

$$ {}_a^cD_t^\alpha({}_a^cD_t^m f(t)) = {}_a^c D_t^{\alpha+m} f(t) \qquad ,(m = 0, 1, 2, ...;\ n-1 < \alpha < n) $$

olmasına karşın

$$ {}_aD_t^m({}_aD_t^\alpha f(t)) = {}_a D_t^{\alpha+m} f(t) \qquad ,(m = 0, 1, 2, ...;\ n-1 < \alpha < n) $$

olmasıdır.

Bu formüllerdeki diferensiyel operatörlerinin yer değiştirebilmesi bazı koşullar altında mümkün olmaktadır.

$$ \begin{gathered} {}_a^cD_t^\alpha({}_a^cD_t^m f(t)) = {}_a^cD_t^m({}_a^cD_t^\alpha f(t)) = {}_a^c D_t^{\alpha+m} f(t) \\ f^{(s)}(0) = 0, \qquad s = n, n+1, ..., m \qquad (m = 0, 1, 2, ...;\ n-1 < \alpha < n) \end{gathered} $$

$$ \begin{gathered} {}_aD_t^m({}_aD_t^\alpha f(t)) = {}_aD_t^\alpha({}_aD_t^m f(t)) = {}_a D_t^{\alpha+m} f(t) \\ f^{(s)}(0) = 0, \qquad s = 0, 1, ..., n-1 \qquad (m = 0, 1, 2, ...;\ n-1 < \alpha < n) \end{gathered} $$

Buradan da görülmektedir ki Riemann-Liouville yaklaşımının aksine, Caputo türevinde $f^{(s)}(0)$ $(s = 0, 1, ..., n-1)$ değerlerinde herhangi bir kısıtlama yoktur.