Riccati Deferensiyel Denklemi

Tanım.

$$\frac{dy}{dx} = f(x) + g(x)\, y + h(x)\, y^2$$

formundaki diferensiyel denklemlere birinci basamaktan Riccati diferensiyel denklemi denir.

Burada $h(x) \equiv 0$ ise denklem lineer diferensiyel denklem, $f(x) \equiv 0$ ise denklem Bernoulli deferensiyel denklemidir. Riccati diferensiyel denkleminin çözümünü bulmak için genel bir metod yoktur.

$$y := -\frac{w'(x)}{h(x)w(x)}$$

dönüşümü yardımıyla bu denklem ikinci basamaktan değişken katsayılı lineer homojen bir denkleme dönüştürülebilir.

Eğer Riccati denkleminin bir $y_0(x)$ özel çözümü biliniyorsa,

$$y := y_0(x) + \frac{1}{w(x)}$$

dönüşümü denklemi,

$$\frac{dw}{dx} + [g(x) + 2h(x)\, y_0(x)]w + h(x) = 0$$

lineer diferensiyel denklemine dönüştürür. Bu denklemde bağımlı değşiken $w(x)$ dir.

Örnek.

$$\frac{dy}{dx} = 3 + 3x^2 y - xy^2$$

Riccati diferensiyel denkleminin bir özel çözümü $y_0(x) = 3x$ dir.

$$y := 3x + \frac{1}{w(x)}$$

dönüşümünü uygularsak, denklem

$$\frac{dw}{dx} - 3x^2 w - x = 0$$

lineer denklemine dönüşür.

Bu denklemin integral çarpanı

$$\lambda(x) = e^{-x^3}$$

dir. Bu integral çarpanı kullanılarak lineer denklemin çözümü

$$w(x) = e^{x^3}\left(\int e^{-x^3} x\,dx + c\right)$$

olarak elde edilir. Verilen Riccati denkleminin çözümü de

$$y(x) = 3x + \frac{1}{e^{x^3}\left(\int e^{-x^3} x dx + c\right)}$$

dir.

Örnek. Aşağıdaki diferensiyel denklemlerin birer özel çözümü yanlarında verilmiştir. Bu denklerin genel çözümünü bulunuz.

1.

$$\begin{aligned} y' &= -2 - y + y^2, \\ y_1(x) &= 2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2\cos x}, \\ y_1(x) &= \sin x \end{aligned}$$

Değişken Değiştirme Yöntemi ile Çözüm

Diferensiyel denklemi tanımlayamadığımız durumlarda denklemi çözmek için kullanılan bir yöntemdir.

Örneğin, $y' = \tan(x - y + 1)$ diferensiyel denkleminde

$$x - y + 1 = u$$

değişken değiştirmesi uygulanırsa

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{du}{dx}$$

yazıldığında denklem

$$\frac{du}{dx} = 1 - \tan u$$

denklemine dönüşür.ki bu denklem değişkenlerine ayrılabilir bir denklemdir ve çözümü kolaylıkla yapılabilir.

Örnek: Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

a.

$$y' = \cos(x - y + 5)$$

Çözüm:

$$x - y + 5 = u$$

dönüşümü uygulanırsa denklem

$$\frac{du}{dx} = 1 - \cos u$$

denklemine dönüşür. Bu denklemin çözümü

$$x + \cot u + \frac{1}{\sin u} = c$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla verilen deklemin çözümü

$$x + \cot(x - y + 5) + \frac{1}{\sin(x - y + 5)} = 5$$

şeklinde yazılabilir.

b.

$$y' + 1 = 4e^{-y} \sin x$$

Çözüm: Denklemde

$$-y = \ln u$$

değişken değiştirmesi yapılırsa, denklem

$$\frac{du}{dx} - u = -4u^2 \sin x$$

denklemine dönüşür ki bu denklem $n = 2$ için Bernoulli denklemidir. Bu Bernoulli denkleminin çözümü

$$\frac{1}{u} = 2(\sin x - \cos x) + ce^{-x}$$

dir. Böylece verilen denklemin çözümü

$$e^{y} = 2(\sin x - \cos x) + ce^{-x}$$

şeklinde bulunur.

c.

$$yy' + 1 = (x - 1)\, e^{\frac{-y^2}{2}}$$

Çözüm: Denklemde

$$z = e^{y^2/2}$$

değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\frac{dz}{dx} + z = (x - 1)$$

lineer denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$z = x - 2 + ce^{-x}$$

ve verilen denklemin çözümü

$$e^{y^2/2} = x - 2 + ce^{-x}$$

dir.