Ters Laplace Dönüşümleri

Tanım 1. $\mathcal{L}\{f\} = F(s)$1 özelliğini sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna F in ters Laplace dönüşümü denir ve $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ ile gösterilir.

Örnek 1. (a) $\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$ olduğundan, $\dfrac{1}{s}$ in ters Laplace dönüşümü $\mathcal{L}^{-1}\{\dfrac{1}{s}\} =$ 1 dir.

(b) $\mathcal{L}\{e^{ax}\} = \dfrac{1}{s-a}$, $s > a$, olduğundan, $\mathcal{L}^{-1}\{\dfrac{1}{s-a}\} = e^{ax}$ dir.

Teorem 1. (Lineerlik Özelliği) $\mathcal{L}\{f_i\} = F(s),\ i = 1, 2, ..., n$, ve $c_1, c_2, ..., c_n$ sabitler olmak üzere

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1F_1 + c_2F_2 + ... + c_nF_n\} = c_1\mathcal{L}^{-1}\{F_1\} + c_2\mathcal{L}^{-1}\{F_2\} + ... + c_n\mathcal{L}^{-1}\{F_n\}$$

dir.

Örnek 2. (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+2}{s^2-3s+2}\right\} =?$ (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+8}{s^2+2s+5}\right\} =?$

Çözüm. (a) $\dfrac{3s+2}{s^2-3s+2} = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{B}{s-2}$ şeklinde basit kesirlerine ayrılırsa, $A = -5$ ve $B = 8$ bulunur. O halde ters Laplace dönüşümünün lineerlik özelliğinden

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2-3s+2}\right\} &= -5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + 8\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} \\
&= -5e^{x} + 8e^{2x}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(b) $s^2 + 2s + 5 = (s+1)^2 + 4$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+8}{s^2+2s+5}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+3}{(s+1)^2+4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+1)^2+4}\right\} \\
&= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\} + \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+4}\right\} \\
&= 3e^{-x}\cos 2x + \frac{5}{2}e^{-x}\sin 2x
\end{aligned}$$

bulunur, burada $\mathcal{L}\left\{e^{bx}\cos ax\right\} = \dfrac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$ $(s > b)$ ve $\mathcal{L}\left\{e^{bx}\sin ax\right\} = \dfrac{a}{(s-b)^2+a^2}$ $(s > b)$ özellikleri kullanılmıştır.

Konvolüsyon

Tanım 2. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının konvolüsyonu

$$f * g = \int_0^x f(t)g(x-t)$$

şeklinde tanımlıdır.

Uyarı 1. $f * g = g * f$ dir.

Teorem 2. (Konvolüsyon Teoremi) $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ ve $\mathcal{L}\{g(x)\} = G(s)$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}\{f(x) * g(x)\} = F(s)G(s)$$

dir.

Konvolusyon Türünde İntegral Denklemler

$$\int_0^x u(t)v(x-t)dt$$

şeklinde bir integrale konvolüsyon türü bir integral denir.

Örnek 3. $h(x) = \int_0^x t^7(x-t)^5 dt$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. $f(x) = x^7,\ g(x) = x^5$ olmak üzere

$$h(x) = f * g$$

dir. Konvolüsyon teoreminden

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{h(x)\} &= \mathcal{L}\{f(x) * g(x)\} \\
&= F(s)G(s) \\
&= \frac{7!}{s^8}\frac{5!}{s^6} \\
&= \frac{(7!)(5!)}{s^{14}}
\end{aligned}$$

bulunur. O halde $h(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(7!)(5!)}{s^{14}}\right\} = \frac{(7!)(5!)}{13!}x^{13}$ elde edilir.

Volterra İntegral Denklemi

$$y(x) = f(x) + \int_0^x k(x-t)y(t)dt \tag{1}$$

şeklinde bir integral Volterra integral denklemi adını alır, burada f ve k verilen fonksiyonlar olup y bilinmeyendir. (1) deki integral konvolüsyon türünde bir intagral olduğundan Konvolüsyon teoremi yardımıyla çözüm bulunabilir.

(1) in her iki yanına Laplace dönüşümü uygulanıp $Y(s)$ çözülürse,

$$Y(s) = \frac{F(s)}{1-K(s)} \tag{2}$$

elde edilir, burada $Y(s) = \mathcal{L}\{y(x)\}$, $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ ve $K(s) = \mathcal{L}\{k(x)\}$ dir. (2) nin her iki yanına ters Laplace dönüşümü uygulanırsa, (1) integral denkleminin çözümü

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{1-K(s)}\right\}$$

bulunur.

Örnek 4.

$$y(x) = 1 + 2\int_0^x e^{-2(x-t)}y(t)dt \tag{3}$$

integral denklemini çözünüz.

Çözüm. (3) denkleminin her iki yanına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2}$$

elde edilr. Buradan

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2}\right\} \\ &= 1 + 2x \end{aligned}$$

bulunur.

Birim Basamak Fonksiyonu

Tanım 3.

$$u(x-c) = \begin{cases} 0, & x < c, \\ 1, & x \geq c, \end{cases}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona birim basamak fonksiyonu denir.

Teorem 3. g, $[0, \infty)$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun ve $c \geq 0$ olmak üzere $\mathcal{L}\{g(x+c)\}$ dönüşümü $s > a$ için mevcut olsun.
Bu durumda $\mathcal{L}\{u(x-c)g(x)\}$ dönüşümü de $s > a$ için mevcut olup

$$\mathcal{L}\{u(x-c)g(x)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{g(x+c)\}$$

dir.

Örnek 5.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & 0 \leq x \leq 2, \\ 3x, & x \geq 2, \end{cases}$$

fonksiyonunun Laplace dönüşümünü hesaplayınız.

Çözüm. $f(x) = 2x + 1 + (x-1)u(x-2)$ şeklinde yazılabilir. Teorem 3 göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(x)\} &= \mathcal{L}\{2x+1\} + \mathcal{L}\{(x-1)u(x-2)\} \\ &= \mathcal{L}\{2x\} + \mathcal{L}\{1\} + e^{-2s}\mathcal{L}\{x+1\} \\ &= \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} + e^{-2s}(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}) \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4. $c \geq 0$ ve $s > a$ için $\mathcal{L}\{g\}$ mevcut olsun. Bu durumda $s > a$ için $\mathcal{L}\{u(x-c)g(x-c)\}$ mevcut olup

$$\mathcal{L}\{u(x-c)g(x-c)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{g(x)\} \tag{4}$$

dir.

Örnek 6. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{s^2}\right\} = ?$

Çözüm. (4) eşitliğinden

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}G(s)\} = u(x-c)g(x-c) \tag{5}$$

dir, burada $G(s) = \mathcal{L}\{g(x)\}$ dir. $c = 2$ ve $G(s) = \dfrac{1}{s^2}$ olmak üzere (5) özelliği göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\} &= u(x-2)(x-2) \\
&= \begin{cases} 0, & x < 2, \\ x-2, & x \geq 2, \end{cases}
\end{aligned}
$$

elde edilir.