Fark ve Öteleme Operatörlerinin Özelikleri

Ankara Üniversitesi

Tanım

(Öteleme operatörü)
$Ex(n) = x(n+1)$, $E^2x(n) = x(n+2)$, $\ldots$, $E^kx(n) = x(n+k)$ şeklinde ifade edilir.

- E operatörü lineerlik özeliğine sahiptir.
- $\Delta E = E\Delta$ dır.

Teorem

Teorem

(i) $\Delta^k \Delta^l = \Delta^l \Delta^k = \Delta^{l+k}$

(ii) $\Delta(x(n)y(n)) = y(n)\Delta x(n) + x(n+1)\Delta y(n)$

(iii) $\Delta\left(\frac{x(n)}{y(n)}\right) = \frac{y(n)\Delta x(n) - x(n)\Delta y(n)}{y(n)y(n+1)}$

Bazı fonksiyonların birinci basamaktan farkları aşağıdaki gibidir.

Örnek

$x(n) = a^n, \ \Delta a^n = (a-1)a^n, \ n \in \mathbb{N}.$

Örnek

$x(n) = \sin an, \ \Delta \sin an = 2 \sin \frac{a}{2} \cos a(n + \frac{1}{2}), \ n \in \mathbb{N}.$

Örnek

$x(n) = \log an, \ \Delta \log an = \log(1 + \frac{1}{n}), \ n \in \mathbb{N}.$

Tanım

Tanım

$x \in \mathbb{R}$ sayısının k yıncı faktöriyel kuvveti veya k yıncı faktöriyel polinomu aşağıdaki şekildedir:

(i) $k \in \mathbb{Z}^{+}$ ise, $x^{(k)} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)$,

(ii) $k = 0$ ise, $x^{(0)} = 1$,

(iii) $k \in \mathbb{Z}^{-}$ ise, $x^{(k)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)...(x-k)}$,

(iv) $k \notin \mathbb{Z}$ ise, $x^{(k)} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-k+1)}$, burada Γ, gamma fonksiyonudur.

$x \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ için aşağıdaki ifadeler gerçeklenir:

Lemma

$\Delta x^{(k)} = kx^{(k-1)}$

Lemma

$\Delta^l x^{(k)} = k(k-1)\dots(k-l+1)x^{(k-l)}$

Lemma

$\Delta^k x^{(k)} = k!$

Örnek

Örnek $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x - 4$ fonksiyonunun faktöriyel kuvveti cinsinden ifadesi, $f(x) = 2x^{(3)} + 3x^{(2)} + 4x^{(1)} - 4$ şeklindedir.