Birinci Basamaktan Fark Denklemleri

Ankara Üniversitesi

$$x(n+1) = a(n)x(n) + g(n), \;\; n \geq n_0 \tag{1}$$

fark denklemi ve

$$x(n_0) = x_0 \tag{2}$$

başlangıç koşulu verilsin. Burada, $a(n)$ katsayısı ve $g(n)$ fonksiyonu $n \geq n_0$ için tanımlı ve $a(n) \neq 0$ dır.

(1) denklemine karşılık gelen homogen denklem

$$x(n+1) = a(n)x(n) \tag{3}$$

dir.

Teorem

(3) homogen fark denklemi ve (2) başlangıç koşulundan oluşan problemin tek çözümü

$$x(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right) x_0$$

olup (1)-(2) başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$x(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right) x_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i) \right) g(r)$$

dir.

NOT:

- $\prod_{i=n_0}^{m_0} a(i) = 1, \; m_0 < n_0,$
- $\sum_{i=n_0}^{m_0} a(i) = 0, m_0 < n_0.$

Örnek

$x(n+1) = 3^n x(n),\ x(0) = 5$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulalım.
$a(n) = 3^n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} x(n) &= \prod_{i=0}^{n-1} 3^i 5 \\ &= 5(3)^{\frac{(n-1)n}{2}} \end{aligned}$$

dir.

Örnek

$x(n+1) = (n+1)x(n) + 2^n(n+1)!$, $x(0) = 1$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulalım.
$a(n) = n+1$ ve $g(n) = 2^n(n+1)!$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} x(n) &= \prod_{i=0}^{n-1}(i+1) + \sum_{r=0}^{n-1}\left(\prod_{i=r+1}^{n-1}(i+1)\right)2^r(r+1)! \\ &= n! + \sum_{r=0}^{n-1} n!2^r \\ &= 2^n n! \end{aligned}$$

dir.

Bazı toplam formülleri

- $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
- $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
- $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$
- $$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(6n^4+15n^3+10n^2-1)}{30}$$

Bazı toplam formülleri

- $$\sum_{i=0}^{n-1} a^i = \begin{cases} \frac{a^n-1}{a-1}, & a \neq 1, \\ n, & a = 1 \end{cases}$$
- $$\sum_{i=1}^{n-1} a^i = \begin{cases} \frac{a^n-1}{a-1}, & a \neq 1, \\ n-1, & a = 1 \end{cases}$$
- $$\sum_{i=1}^{n-1} ia^i = \frac{(a-1)(n+1)a^{n+1} - a^{n+2} + a}{(a-1)^2}, \ a \neq 1.$$