SÜREKSİZ (DISCRETE)

OLASILIK DAĞILIMLARI

RANDOM DEĞİŞKEN

- Sayısal olarak ifade edilebilen bir deneyin sonuçlarına rassal (random) değişken denir.
- Temelde iki çeşit random değişken vardır.

  - süreksiz (discrete) rassal değişken

  - sürekli(continuous) rassal değişken

1)SÜREKLİ RANDOM DEĞİŞKEN: Belirli bir aralıktaki her değer random değişken için geçerli olabilir.

Örneğin; x random değişkeni (3,7.5) aralığındaki her değeri alabiliyorsa x sürekli random değişkendir.

__2)SÜREKSİZ RANDOM DEĞİŞKEN:__ Değişken için belirli bir aralıkta sayılabilen belli bir kaç değer söz konusudur.Örneğin;

- Bir parayı 5 kez attığımızda tura gelme sayısı x random değişkeni olsun. Bu durumda x in alabileceği değerler x=0,1,2,3,4,5 olabilir. Yani tura hiç gelmeyebilir (x=0),....,5 atışta da tura gelebilir (x=5)
- 5 dakikada petrol istasyonuna gelen araç sayısı
- 200 müşteriden 30 yaş üzeri olanların sayısı
- Bir haftada yapılan satış sayısı

SÜREKSİZ RANDOM DEĞİŞKENLERİN OLASILIK DAĞILIMLARI

- Bir deney için olabilecek tüm sonuçlar ile bunların gerçekleşme olasılıklarını bir arada gösteren 'diyagramlara' **olasılık dağılımları** denir. Örneğin; iki parayı aynı anda attığımız deney için olabilecek tüm sonuçlar {TT,TY,YT,YY} olmak üzere X random değişkeni yazı gelme sayını göstersin. Bu durumda P(X=0)=1/4,P(X=1)=2/4,P(X=2)=1/4 olur.

.....

- Buradaki deneyin sonuçları birbirlerini engellemelidir.
- Deneyin herbir sonucu için bulunacak olasılıkların toplamı daima 1 dir. Yani,

x= random değişkeninin değeri

P(x)= random değişkenin meydana gelme olasılığı

$$0 \leq p(x_i) \leq 1$$

$$\Sigma P(x_i) = 1$$

SÜREKSİZ OLASILIK DAĞILIMLARININ ORTALAMASI VE VARYANSI

- Bir X random değişkeni için ortalama (beklenen değer) $\mu=E(X)$ ile ve varyansı ise $\sigma^2=var(X)$ ile gösterilir. Mümkün olan her durum $X=x_i$ olmak üzere

$$\boxed{\mu = E(X) = \sum x_i \, p(x_i)} \quad \boxed{\sigma^2 = \Sigma \, (x_i - \mu\,)^2 p(x_i)}$$

Yukarıdaki para örneğimiz için hesap yapacak olursak,

$\mu=E(X)=0 \times ¼ + 1 \times 2/4 + 2 \times ¼ = 1$

$\sigma^2=var(X)=(0-1)^2 1/4+(1-1)^2 2/4+(2-1)^2 2/4=0.5$

SÜREKSİZ OLASILIK DAĞILIM MODELLERİ

BİNOM	**HİPERGEOMETRİK**	**POISSON**

1)BİNOM OLASILIK DAĞILIMLARI

- Benzer bir deneyin n kez tekrarlanması sonucu oluşan dağılımlardır. Bu n deneyde kesin olarak x kez elverişli olay meydana gelmektedir.
- n tane deneyin herbirinin sonucu diğerleriyle bağımsızdır. Yani sonuçlar birbirini etkilemez. Ayrıca deneyin her bir sonucu ya başarılı (elverişli-success) hal ya da başarısız(elverişsiz-failure) hal olabilir.
- ÖRNEĞİN; bir paranın 4 kez atılması,bir bakkaldan 10 tane mum alınması, vb.

……..

p:her bir deneydeki başarı olasılığı

q:her bir deneydeki başarısızlık olasılığı=1-p

x:toplam deneydeki başarılı hal sayısı

n:tekrarlanan deney sayısı

olmak üzere n. deney sonunda başarılı olma olasılığı P(x);

$$P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

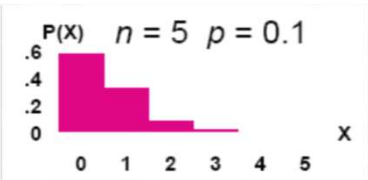
her x değeri için beklenen değer ve varyans;

$\mu=E(x)=n.p$ $\sigma^2=E[(x-\mu)^2]=n.p.(1-p)$

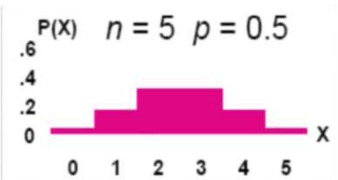
Örnek

5 kez tekrarlanan ve başarılı olma olasılığı 0.1 olan bir deney için; n=5 p=0.1

μ=E(x)=5 x 0.1=0.5



n=5 ve p=0.5 olan bir deney için;



σ^2=5 x 0.5 x (1-0.5)=1.244924

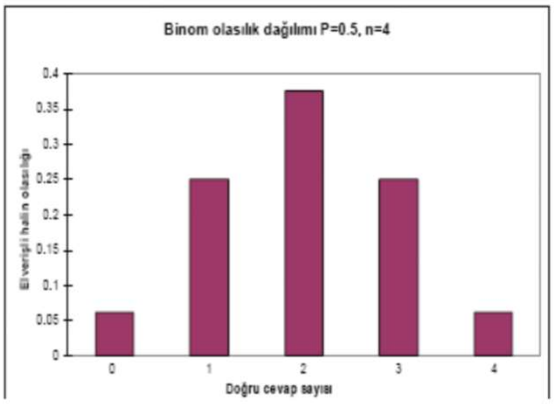
o halde σ=1.118

Örnek

Öğrencilerin konu ile bilgisinin olmadığı 4 tane doğru-yanlış sorusu için 0,1 doğru cevap bulma olasılığı nedir?

$$P(0) = \frac{4!}{0!(4-0)!}(0.5)^0(1-0.5)^{4-0} = 0.0625$$

$$P(1) = \frac{4!}{1!(4-1)!}(0.5)^1(1-0.5)^{4-1} = 0.25$$



ÖDEV

Bir çift zarın 4 kez atılması deneyinde x zarların üzerindeki sayıların toplamının 7 olmasını gösterdiğine göre x için beklenen değer ve standart sapmayı hesaplayınız.

2)HİPERGEOMETRİK OLASILIK DAĞILIMLARI

- Binom dağılımları ile oldukça benzerlik gösteren hipergeometrik dağılımın farklı yanı deney sonuçlarının bağımsız olmaması ve birbirlerinin olma olasılıklarını etkilemesidir.
- Elverişli halin gerçekleşme olasılığı deneyden deneye fark gösterdiğinde binom yerine hipergeometrik dağılım kullanılır.
- Eğer bir popülasyondan örnek seçimi yerine koymadan yapılıyor ise ve örnek sayısı popülasyonun %5'ini geçmiş ise hipergeometrik dağılım kullanılır. Eğer yerine koyma yoksa ve %5'den az bir örnek var ise binom kullanılabilir.

…….
N= popülasyon büyüklüğü

s= popülasyondaki elverişli hal sayısı

x= örnekle ilgili elverişli hal sayısı

n= örnek ya da deney sayısı

C= kombinasyon sembolü

OLASILIK;

$$P(x) = \frac{({}_sC_x)({}_{N-S}C_{n-x})}{{}_NC_n}$$

$${}_nC_x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

x adet nesne n sayida bir gruptan seciliyorsa

ORTALAMA VE VARYANS;

$$\mu = \sum xP(x) = \frac{nS}{N}$$

$$\sigma^2 = \sum x^2P(x) - \mu^2 = \left[n\left(\frac{S}{N}\right)\left(1 - \frac{S}{N}\right)\right]\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Örnek

50 adet cep telefonunun 40 tanesi kusursuz çalışır iken 10 taneden en az biri bozuktur. Çekilen örnekler geri yerine koyulmadan 5 rasgele örnek çekilirse bunlardan 4'ünün sağlam olması olasılığı nedir?

N=50   s=40   x=4   n=5   olmak üzere;

$$P(4) = \frac{({}_{40}C_4)({}_{50-40}C_{5-4})}{{}_{50}C_5} = \frac{(\frac{40!}{4!36!})(\frac{10!}{1!9!})}{\frac{50!}{5!45!}} = 0.431$$

ÖDEV

Bir kutuda 3 kusurlu 7 kusursuz parça vardır. Yerine koymaksızın 3 parça bu kutudan çekiliyor. Buna göre 2 kusurlu parça çekme olasılığını, ortalamayı ve varyansı bulunuz.

3)POISSON OLASILIK DAĞILIMLARI

- Farklı zaman aralıkları ve bu aralıklarda oluşan bağımsız elverişli haller söz konusudur.
- Bir zaman aralığı için başarılı olma olasılığı o zaman aralığı ile orantılıdır.
- Ölçüm aralığı içinde farklı noktalarda olaylar gerçekleşir.

Yukarıdaki haller mevcut olduğunda poisson dağılımı kullanılır. Bu dağılım sayesinde belli bir aralıkta bir olayın kaç kez meydana geldiğini bulabiliriz.

……….

- **Poisson dağılımı ortalaması ve varyansı eşit olan tek dağılımdır.** Örneğin içinde geçebilecek "ortalama" kelimesi poisson dağılımı için bir ipucu oluşturur.
- ÖRNEĞİN; İç Anadolu Bölgesinde aylık çalınan araba sayısı,öğrenci işlerinden bir günde alınan transkript sayısı,acil servise saatte gelen hasta sayısı, vb.
- μ=ortalama elverişli hal sayısı

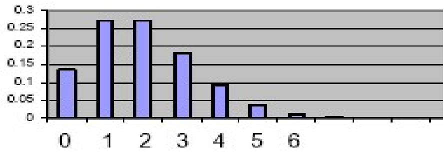
e = 2.7183 (sabit)

x =belli aralıktaki elverişli hal sayısı (0,1,2,...)

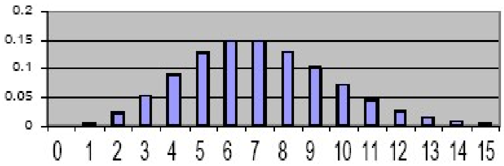
$\mu = \sum x_i p(x_i)$ $\sigma^2 = \sum x^2 P(x) - \mu^2 = \mu$

……..

- Poisson dağılımında herhangi bir μ değerinin dağılımı pozitif çarpıklığa sahiptir. *M* değeri arttıkça poisson dağılımı normal dağılıma yaklaşır.
- Poisson olasılık dağılımlarını grafiğe yansıtırsak;



μ=2



μ=7

Örnek

- ABC yakıt firmasına her 15 dakikada bir ortalama 3 araç gelmektedir. Gelecek 15 dakika içinde 2 aracın gelmesi olasılığını hesaplayın.

X=2 μ=3

$$P(2) = \frac{3^2 (2.7183)^{-3}}{2!} = 0.224$$

- Eğer elverişli hal olasılığı n.p<5 ve deney sayısı n>100 ise poisson dağılımı binom dağılımı yerine uygulanabilir.

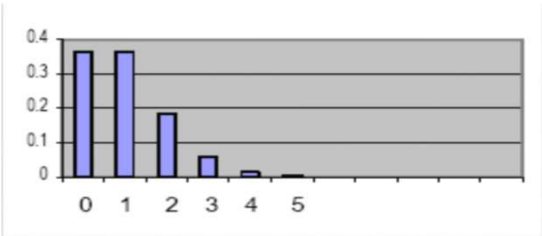
……….

Poisson olasılık dağılımları genel olarak,

$$P(X=0)=p(0)=\frac{e^{-1}1^0}{0!}=e^{-1}=.3678 \qquad P(X=2)=p(2)=\frac{e^{-1}1^2}{2!}=\frac{e^{-1}}{2}=.1839$$

$$P(X=1)=p(1)=\frac{e^{-1}1^1}{1!}=e^{-1}=.3678 \qquad P(X=3)=p(3)=\frac{e^{-1}1^3}{3!}=\frac{e^{-1}}{6}=.0613$$

diyagram olarak,



ÖDEV

- 200 sayfalık bir kitaba 200 eksik basım rasgele dağıtılıyor. Bir sayfada en az 2 rksik basım bulunması olasılığı nedir?
- Saat 09:00 dan 09:05 e kadar bir operatörün aldığı telefon konuşmalarının sayısı ortalama olarak 2 dir.
  - a) Operatörün aldığı telefonların sayısının olasılığını,ortalamasını ve varyansını bulun.
  - b) Bir sonraki gün operatörün aynı zaman diliminde telefon konuşması almaması ve 2 telefon konuşması alması olasılıklarını hesaplayın.