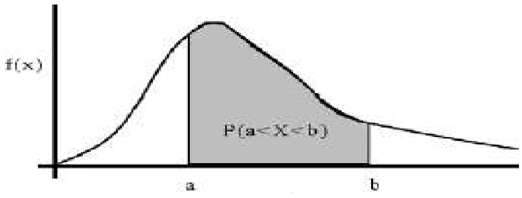
SÜREKLİ (CONTINUOUS) OLASILIK DAĞILIMLARI

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

Sürekli bir random değişken (a,b) aralığındaki her değeri alabiliyorsa bu değişkene ait olasılık dağılım fonksiyonunun grafiğinde eğri altında kalan alan bize bu x değişkeninin olasılığını verir. Eğri altında kalan alandan bahsettiğimiz için x değişkeninin olasılığı P(x) integral yardımıyla bulunur.

f(x): x değişkeni için olasılık dağılım fonksiyonu(f(x)≥ 0)
(a,b): x 'in değişkenlik aralığı olmak üzere



$$P(a < X < b) = \int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$$

Ayrıca olasılık daima max. 1 değeri alabileceği için ;

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x)dx = 1$$

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

SÜREKLİ DEĞİŞKENLERDE ORTALAMA VE VARYANS

- Sürekli random değişkenin ortalaması(beklenen değeri) E(x) olmak üzere

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

- Sürekli random değişken için varyans var(x) olmak üzere

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)\,dx$$

…….

Sürekli değişkenler bir aralıkta kesin olarak belli değerler alamadığı için x=a,x=b,vs. şeklinde değişimler yerine x<a, x>a, a≤x≤b, vs. şeklinde aralıklardan söz edilebilir.

Sürekli olasılık dağılımları 3'e ayrılır:

1) Uniform olasılık dağılımı

2) Üstel olasılık dağılımı

3) Normal olasılık dağılımı

***Standart normal dağılım

1) UNIFORM OLASILIK DAĞILIMLARI

X Random değişkeninin değişkenlik aralığı (a,b) olsun. Başka bir ifadeyle, a=X'in alabileceği min. değer ve b= X'in alabileceği max. değer olsun. Eğer (a,b) aralığı ile X'in olasılığı orantılı ise bu değişken uniform dağılıma sahiptir. Böylece, $a \leq X \leq b$ olmak üzere;

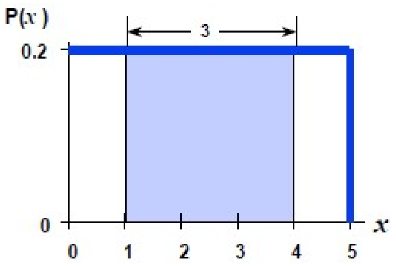
X'in olasılık fonksiyonu **$f(X)=1 / (b-a)$**

X'in ortalaması **$E(X)= (a+b) / 2$**

X'in varyansı **$var(X)= (b-a)^2 / 12$**

Örnek

- X sürekli rassal değişken, 1<x<4 ve f(x)=0.2 ise; P(1<x<4) olasılığı



P(1<x<4)=3.0,2=0,6

(taralı alan)

2) NORMAL OLASILIK DAĞILIMLARI

- Normal olasılık dağılımı [f(x)] çan şeklinde simetrik bir grafiğe sahip bir dağılımdır.
- Günlük hayatta, endüstride en çok normal dağılım ile karşı karşıya kalınır.
- Normal dağılım için ortalama(beklenen değer=E(x)) değeri µ ile gösterilir.
- Normal dağılım grafiği her zaman için µ değerine göre simetriktir. Hesaplamalar bu değer üzerinden yapılır.µ diyagramdaki en büyük değerdir.

……..

- X sürekli random değişkeni normal dağılım altında reel eksendeki tüm değerleri alabilir. Yani; $-\infty<x<+\infty$ aralığı değişkenlik aralığıdır.
- f(x) eğrisi altında kalan alan daima 1'dir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

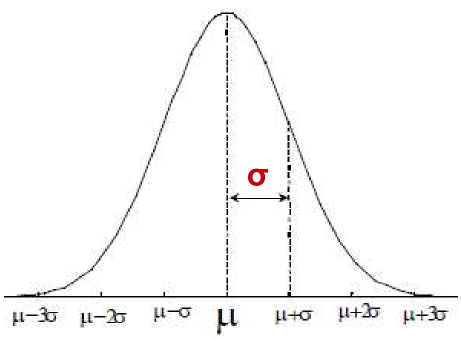
- Normal dağılım için μ=aritmetik ortalama=mod=medyan
- Standart sapmayı gösteren σ çan grafiği için genişlik(yayılma miktarı) göstergesidir.

μ=arit. ort.
σ=standart sapma
π=3,14159
e=2,71828   olmak üzere

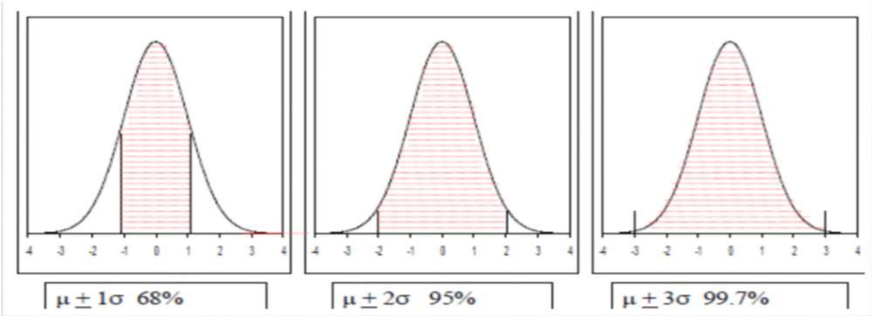
Olasılık dağılım fonksiyonu;

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$x \sim N(\mu,\sigma^2)$ gösterimine göre x ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan normal dağılıma sahiptir.



Dağılımın Merkezinden Sapma Durumları



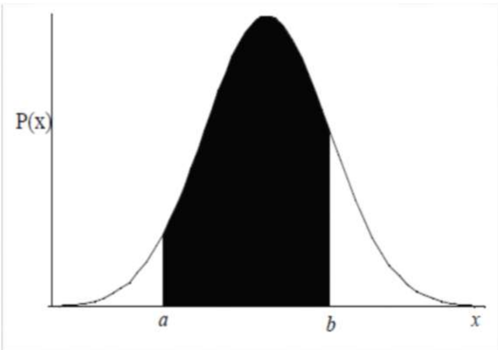
Veri setine yönelik;

- *μ-σ<x<μ+σ aralığı tüm dağılımın %68'ini,*
- *μ-2σ<x<μ+2σ aralığı tüm dağılımın %95'ini,*
- *μ-3σ<x<μ+3σ aralığı tüm dağılımın %99.7'sini*

temsil etmektedir.

....

- Normal dağılımlarda olasılıklar eşitsizlikler yardımıyla integrale dönüştürülerek hesaplanır.



a ve b aralığındaki olasılık;

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

STANDART NORMAL DAĞILIM

- Normal dağılımda olasılık hesaplamaları yapabilmek için değişkenin standartlaştırılması yani standart normal dağılımdan faydalanılması gerekmektedir.
- Normal dağılım için aritmetik ortalama μ=0 ve varyans σ^2=1 alınıp diğer tüm şartlar aynı kaldığında oluşan dağılıma ***standart normal dağılım*** denir.

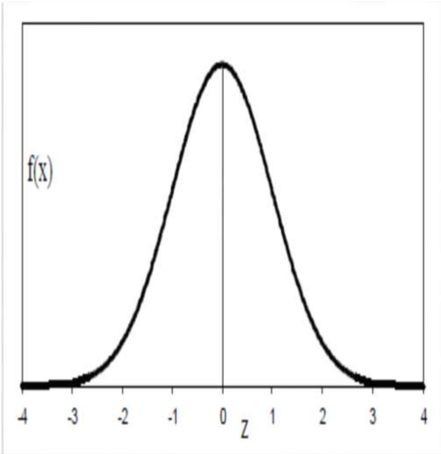
....

Standart normal dağılımın değişkeni olan **z standart normal değişkeni** büyük önem teşkil etmektedir. Normal dağılım hesaplarındaki **x rastgele değişkeni** muhakkak aşağıdaki şekilde **z değişkenine dönüştürüldükten sonra** işlemler yapılmalıdır.

$$\boxed{z=(x-\mu)/\sigma}$$

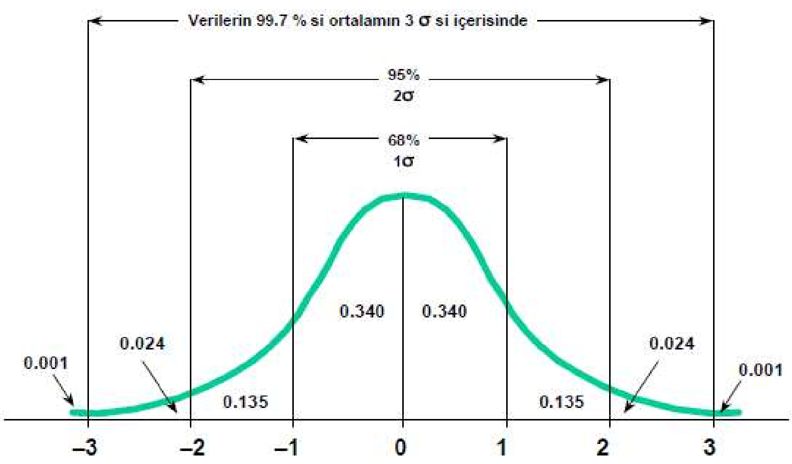
Standart normal dağılım grafiği μ=0 a göre simetriktir ve eğri yatay eksene asimptotik olarak gider.

Eğri altındaki tüm alan 1 olduğundan o noktasının sağ ve solunda kalan alanlar 0,5 lik parçalar halindedir.



Z rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği

Standard Normal Dağılım : $\mu = 0$ ve $\sigma = 1$



- X rasgele değişkeni z standart normal değişkenine dönüştürüldükten sonra z tablosu kullanılarak aranılan olasılık değeri kolaylıkla bulunabilir.

- Standart z tablosunun kullanımını şöyle özetleyebiliriz:

- Tablodaki yatay bölüm Z değeri için (yüzdebirler basamağını *,**) virgülden sonraki ikinci basamağı, dikey bölüm ise tam kısım ve birinci ondalık kısmı (ondabirler basamağı *,*) gösterir. Eldeki veriye göre ilgili satır ve sütunun kesiştiği yer aranan değerdir.

Z tablosu için aranan değer her zaman ilgili satır ve sütunun kesiştiği yer olmayabilir. Bu durum z değeri için geçerli olan eşitsizliğin durumuna göre belirlenir. Tablodaki bulunan değer her zaman 0 ile mevcut z değeri arasında kalan alanı verir.

<u> a≥0 olmak üzere</u>**

$P(z<a)= 0{,}5+$tablo değeri

$P(z\leq a)=0{,}5+$ tablo değeri

$P(z>a)=1-P(z<a)$

$P(z\geq a)=1-P(z\leq a)$

……

<u>a<0 olmak üzere</u>**

P(z<a)=P(z>-a)=1-P(z<-a)

P(z≤a)=P(z≥-a)=1-P(z<-a)

P(z>a)=P(z<-a)=0,5+(-a)ya göre tablo değeri

P(z≥a)=P(z≤-a)=0,5+(-a)ya göre tablo değeri

STANDART NORMAL DAĞILIM (Z) TABLOSU

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

Örnek

- P(z<0.83)=0.2967

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389

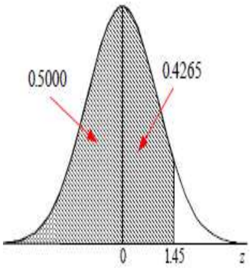
ÖRNEKLER

1) P(z<1.45)=0,5+0,4265=0,9265

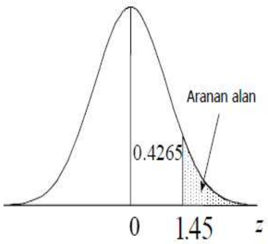
2)P(z>1.45)=1-P(z<1.45)=0.0735

3)P(-1.26<z<0)=P(0<z<1.26)=0.3962

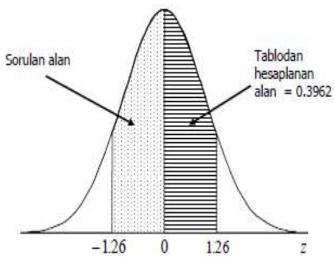
1



2



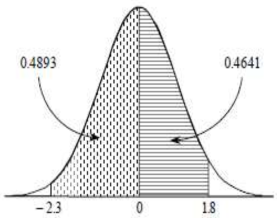
3



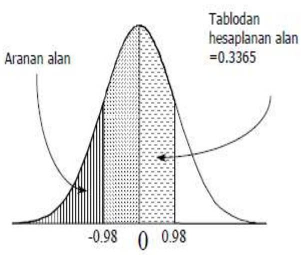
- 4) P(z<-0.98)=P(z>0.98)=1-P(z<0.98)=0.1635
- 5)P(-2.3<z<1.8)=P(-2.3<z<0)+P(0<z<1.8)
- =0.9534
- 6)P(-1.4<z<-0.5)=P(0<z<1.4)-P(0<z<0.5)

=0.2277

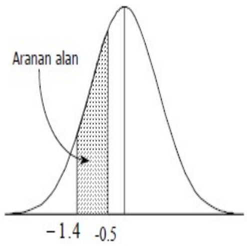
5



4



6



Yukarıdaki örneklerin hepsinde z değerinden yola çıkarak olasılık hesapları yaptık. Ancak, çeşitli durumlarda bu işlemleri tersten yapmamız gerekebilir.

Diğer ifadeyle, olasılık değerleri (eğri altındaki alan) bilinip z değerini hatta çoğu zaman x=zσ+μ eşitliğinden x değerini bulmamız gerekebilir. Böyle bir durumda olasılık değeri tablodan bulunup karşı gelen satır ve sütun birleştirilir ve z değerine ulaşılır.

Örnek

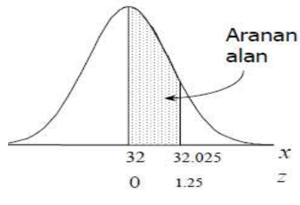
- Bir dolum makinası ortalama olarak 32ml suyu 0.02ml standart sapmayla su dolum işlemini gerçekleştirmektedir. Dolum miktarı normal dağılım sergiliyor ise rasgele seçilen bir şişenin 32 ile 32.025ml arasında su içerme olasılığı nedir?

μ=32ml ve σ=0.02ml olmak üzere $P(32<x<32.025)=?$

<u>ÇÖZÜM:</u>

$z=(x-\mu)/\sigma$ eşitliğinden x=32 için z=0 ve x=32.025 için z=1.25 bulunur. O halde,

$$
\begin{aligned}
P(32<x<32.025) &= P(0<z<1.25) \\
&= P(z<1.25)-P(z<0) \\
&= [0.5+0.3944]-0.5=0.3944
\end{aligned}
$$



- Rasgele seçilen bir şişenin 31.97ml fazla su içerme olasılığı nedir?

- $P(x>31.97)=?$

- $z=(x-\mu)/\sigma$ eşitliğinden $x=31.97$ için $z=-1.5$ bulunur. O halde,
- $P(x>31.97)=P(z>-1.5)=P(z<1.5)=0.5+0.4332$
  $=0.9332$

3)EXPONENT (ÜSTEL) OLASILIK DAĞILIMI

- Uniform dağılıma benzer özellik gösterirler.
- μ=aritmetik ortalama (beklenen değer)

  $f(x)$= olasılık yoğunluk fonksiyonu

  $\mu>0$ ve $x\geq0$

  $e=2.71828$ olmak üzere

$$f(x)=\frac{1}{\mu}e^{-x/\mu}$$

Ayrıca (min a=0 olabilir)

$$P(a \leq x \leq b)=\int_a^b f(x)dx$$

Örnek

Akşam trafiğinde araçların hızlarını denetlemektedir. Araçlar 62km/saat aritmetik ortalamalı normal dağılım sergilemektedirler. Araçların %3'ü 72km/saat üzerinde hareket ediyorsa tüm araçlar için standart sapmayı hesaplayınız.

$P(x>72)=0.03$ ve $\mu=62$ ise $\sigma=?$

$P[(x-62)/\sigma > (72-62)/\sigma]=P(z>10/\sigma)$

$=1-P(z<10/\sigma)=0.03$

$P(z<10/\sigma)=0.97$ o halde Z tablosundan bakılırsa 0.47 ye karşılık gelen $z=1.88$ olarak bulunur.

Böylece, $10/\sigma=1.88$ den $\sigma=5.32$ hesaplanır.

ÖDEV

X rastgele değişkeni (0,1) aralığında düzgün olarak dağılmaktadır. $P(x\leq 0,4)=0,4$ ve $y=x+1$ olmak üzere $P(y\geq k)=0,6$ ise k değerini bulunuz.

ÖDEV

Bir populasyondaki kişilerin ağırlıklarının ortalaması 60 kg. Varyansı 25 kg^2 olan normal dağılıma sahip olduğu varsayılıyor. Populasyondan rasgele bir kişi seçildiğinde;

a)50kg'dan hafif

b)55-60kg arasında

c)65kg'dan daha ağır olması olasılıkları nedir?

d)Rasgele 300 öğrenci alındığında ağırlıkları aşağıdaki aralıklarda olan kaç kişi vardır?

i)50kg'dan az

ii)50-55kg arası

iii)55-65kg arası

iv)65kg'dan fazla

ÖDEV

Bir standart normal dağılımda aşağıdaki koşulları sağlayan k değerlerini bulunuz.

(a) $P(z < k) = 0.1271$

(b) $P(z < k) = 0.9495$

(c) $P(z > k) = 0.8186$

(d) $P(z > k) = 0.0073$

(e) $P(0.90 < z < k) = 0.1806$

(f) $P(k < z < 1.02) = 0.1464$

ÖDEV

Radyoaktif bir cisim tarafından yayınlanan ardışık iki parçacığın yayın anları arasında geçen süre μ=100 parametreli üstel dağılımdır. Ardışık iki yayın arasında geçen sürenin;

a) Bir saniyeden az

b) 3 ile 4 saniye arasında

c) 4 saniyeden fazla olması olasılıkları nedir?

d) Ardışık iki yayın arasında geçen sürenin en fazla t kadar olması olasılığı ½ ise t=?