

HİPOTEZ TESTLERİ

1. Bölüm

Prof.Dr. Fazıl GÖKGÖZ

1

HİPOTEZ NEDİR?

- Örnekleme ile test edilmeye çalışılan bir popülasyonun ilgili parametresi hakkında ortaya sunulan iddiadır.
- Örneğin;
 - A dersi için vize ortalaması 50'nin altındadır
 - A ve B lastik firmalarının ürettikleri lastiklerin kaliteleri aynıdır.
- Görüldüğü gibi bir konu hakkında öne sürülen ve doğruluğu henüz ispatlanmamış görüşler hipotezlerdir. Hipotezler üzerinde çeşitli işlemler yapılarak ifadenin “doğruluğu/yanlışlığı” araştırılır.

Prof.Dr. Fazıl GÖKGÖZ

2

HİPOTEZ TESTİ VE AŞAMALARI

- Popülasyonu incelemeye yönelik yapılan çalışmalar ve bunların raporlanması ile hipotezin kabul edilip edilmeyeceğinin belirlenmesi işlemine **hipotez testi** denir.
- Hipotez testi aslında bir nevi karşılaştırma ve seçim işlemi olduğu için birden fazla hipoteze ihtiyaç duyulur. Bu hipotezlere ise **alternatif hipotez** denir.

Prof.Dr. Fazıl GÖKGÖZ

3

Hipotez Testi 5 Aşamalıdır

1) HİPOTEZLERİN BELİRLENMESİ:

Popülasyon parametresine genellikle belli bir değer atanır ve bu öne sürülen temel iddia **sıfır veya farksızlık (null) hipotezidir**. Bu hipotez sıfır/başlangıç hipotezi olarak da bilinir. H_0 ile gösterilir.

Mevcut veriler sıfır hipotezinin doğruluğu hakkında şüphe uyandırdığında kıyas yapmak için ortaya sunulan ikinci hipotez **alternatif hipotezdir**. Yapılan işlemler eğer H_0 'ı yanlış çıkarırsa bu H_A 'nın kabulü anlamına gelir.

Prof.Dr. Fazıl GÖKGÖZ

4

.....

2) ÖNEM veya RİSK DERECEİNİN BELİRLENMESİ:

Genellikle risk derecesi olarak %5=0,05 ve %1=0,01 kullanılmakla birlikte bu tercihi bir durumdur. Risk derecesi temelde doğru olan null hipotezinin reddedilme olasılığını gösterir.

Risk derecesini belirleyerek hipotez testi sırasında yapılabilecek hataları minimuma indirmek isteriz. Bir hipotez testi sırasında null hipotezinin doğruluk/yanlışlık ve kabul/reddedilme durumlarına göre 2 tip hata yapılabilir (1.tip ve 2.tip hata).

Prof.Dr. Fazıl GÖKGÖZ

5

.....

Null hipotezi doğru iken reddedilirse 1. tip hata, yanlış iken kabul edilirse 2.tip hata yapılmış olur.

Alınan karar	Null hipotezi doğru	Null hipotezi yanlış
Null hipotezi kabul etme	<i>Doğru karar</i>	<i>2. Tip hata</i>
Null hipotezi reddetme	<i>1. Tip hata</i>	<i>yorumsuz</i>

Prof.Dr. Fazıl GÖKGÖZ

6

.....

3) İSTATİSTİKSEL TEST METODUNUN BELİRLENMESİ:
Örneğin F, t, ki kare istatistiksel testleri kullanılarak null hipotezi ile ilgili değerin bulunması işlemidir.

4) NULL HİPOTEZİNİN KABUL/RED DURUMUNUN BELİRLENMESİ: Yukarıdaki maddede (3) bulunacak değerin durumuna göre null hipotezinin kabul/red koşullarının belirlenmesidir.

5) NULL HİPOTEZİ İÇİN KARAR VERME: Yapılan işlem sonuçlarına göre null hipotezinin kabul edilip edilmeyeceği belirlenir.

Prof.Dr. Fazıl GÖKGÖZ

7

1) Hipotezleri Belirlemek

Ders geçmek için gerekli minimum notun ortalama 60 olduğu bir sınıftan seçilen 40 öğrencinin aldığı notların ortalaması 64 olsun. Bu durumda popülasyonun (sınıfın) gerçek ortalaması 60'ın üzerinde midir?

$$H_0: \mu = 60$$

$$H_A: \mu > 60$$

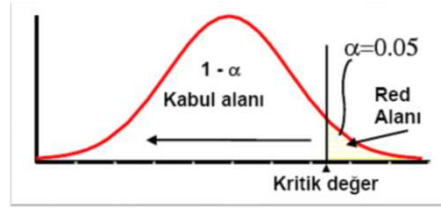


Prof.Dr. Fazıl GÖKGÖZ

8

2) Önem Derecesini (α) Belirlemek

Sıfır hipotezini gerçekten doğru iken reddetme olasılığının yani önem derecesinin $\alpha=0,05$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda grafiksel bir açıklama yapacak olursak;



Prof.Dr. Fazıl GÖKGÖZ

9

3) Hipotez Testinin Yönünü Belirlemek

Alternatif hipotez için yazılan duruma göre hipotez testi tek yönlü ya da iki yönlü olabilir.

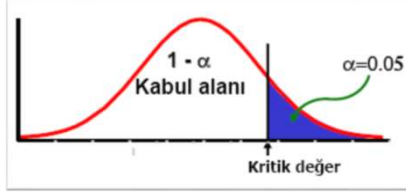
Tek yönlü hipotez testi için α direkt alınır iken iki yönlü hipotez testinde alan belirlenirken α yerine $\alpha/2$ değeri ile işlem yapılır.

Aşağıda alternatif hipotezin durumuna göre grafiksel gösterimler verilmiştir. (" \leq " ve " \geq " durumları " $<$ " ve " $>$ " için de aynıdır.)

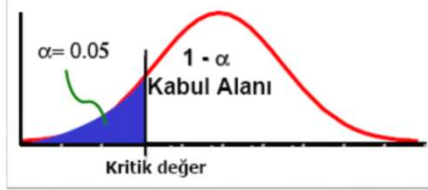
Prof.Dr. Fazıl GÖKGÖZ

10

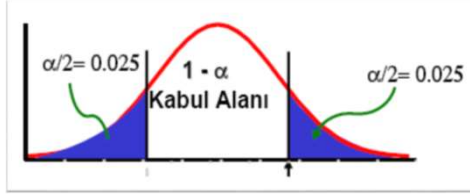
$H_A: \mu \geq 60$
(tek yönlü)



$H_A: \mu \leq 60$
(tek yönlü)



$H_A: \mu \neq 60$
(çift yönlü)



Prof.Dr. Fazıl GÖKGÖZ

11

4) Kritik Değer/Değerleri Belirlemek

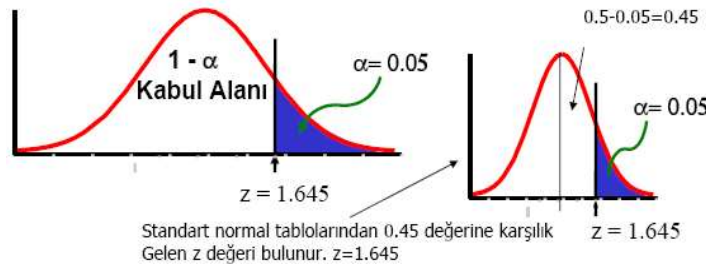
- Null hipotezinin doğru olduğu varsayımı ile olasılığı $1 - \alpha$ olan değer aranan kritik değerdir. İlgili istatistik testi için değişmekle birlikte kritik değer standart normal dağılımlar için z^* ile gösterilir.
- Eğer popülasyon için standart sapma değeri biliniyor ise ya da gözlem sayısı $n \geq 30$ ise $0,5 - \alpha$ değerine karşılık gelen z değeri tablodan bulunur ve aranan z^* değeri odur.

Prof.Dr. Fazıl GÖKGÖZ

12

.....

- Örneğimizdeki $\alpha=0,05$ için $n=40$ olduğundan standart dağılım tablosu kullanılırsa tabloda $0,5-0,05=0,45$ değerine karşılık gelen z değeri $1,645$ olduğundan aranan kritik değer $z^*=1,645$ dir.



Prof.Dr. Fazıl GÖKGÖZ

13

5) Test İstatistiğini Belirlemek ve Kritik Değer ile Karşılaştırmak

μ =popülasyonun ortalaması

σ =popülasyonun standart sapması

s =örneklemin standart sapması

\bar{X} =örneklemin ortalaması

z =kritik değer olmak üzere;

- Popülasyona ait standart sapma biliniyor ise;
$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

- Popülasyonun standart sapması bilinmiyor ve $n \geq 30$ ise σ yerine s alınarak z değeri bulunur.
- Daha sonra z ile z^* değeri karşılaştırılarak karara varılır.

Prof.Dr. Fazıl GÖKGÖZ

14

HİPOTEZ TESTİ ADIMLARI (ÖZETİ)

1. H_0 ve H_A hipotezleri belirlenir
2. α tespit edilir
3. Hipotez testinin yönü belirlenir
4. Kritik değer z^* bulunur
5. Test istatistiği yapılarak z değeri bulunur ve karşılaştırma ile karar verilir.

Prof.Dr. Fazıl GÖKGÖZ

15

ÖRNEK

- $H_0:\mu=50$ ve $H_A:\mu\neq 50$ olmak üzere örnek ortalaması 49, örneklemdaki veri sayısı ise 36 dır. Popülasyonun standart sapması 5 iken hipotez için %5 risk alındığında
 - a) Hipotez testinin yönünü belirleyin
 - b) Null hipotezi ile ilgili karar verin
 - c) Verilen karar ile ilgili güven durumu yani p değeri nedir?

Prof.Dr. Fazıl GÖKGÖZ

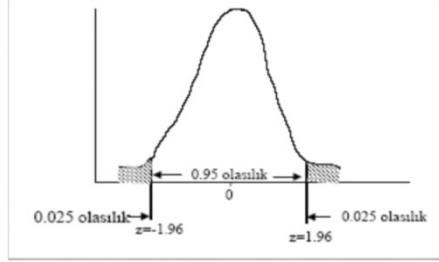
16

Çözüm

- a) H_0 hipotezine göre popülasyon ortalaması 50den büyük de olabilir küçük de. Bu sebeple bir yönlendirme yapılmadığı için hipotez testi çift yönlüdür (\neq 'den de anlaşılacağı gibi).
- b) $\alpha = 0,05$ olmak üzere çift yönlü hipotez testi olduğu için $\alpha/2=0,025$ ile işlem yapılır. Buna göre $0.5-0.025=0.475$ olasılığına karşılık gelen z değeri tablodan 1.96 olarak bulunur. O halde aranan $z^*=1.96$ olmaktadır. Diğer taraftan formül yardımı ile $z=(49-50) / (5 / \sqrt{36}) = -1.2$ bulunur. Şimdi z ile z^* değerlerini karşılaştırıp karar verelim:

Prof.Dr. Fazıl GÖKGÖZ

17



Yukarıdaki şekilde de görüldüğü gibi bulunan $z = -1,2$ değeri taralı alanın dışında kaldığı için H_0 hipotezi kabul edilmelidir.

c) Verdiğimiz karardan ne kadar emin olduğumuzu öğrenebilmek için z değerinin bulunan değerin üzerinde olabilme olasılığını (p değerini) bulmalıyız.

$P(z < -1.2) = 0,5 - 0,3849 = 0.1151$ dir. Fakat testimiz çift yönlü olduğu için bunun iki katı aranan p değeri olur. Yani $p = 2 \times 0.1151 = 0,2302$ dir. $p > \alpha$ olduğu için null hipotezi kabul edilmelidir. Bulunan p değeri popülasyonun ortalamasının 50nin altında ya da üstünde olması (H_a 'nın doğru olma olasılığı) olasılığının %11.51 olduğunu söyler.

Prof.Dr. Fazıl GÖKGÖZ

18

ÖRNEK

- Rasgele seçilen 25 kutu mısır gevreğinin ortalaması 372.5gr. ve üretici firmanın belirlemelerine göre standart sapma 15gr'dır. Bu durumda 0.05 önem derecesi ile bir kutu mısır gevreğinin 368gr üzerinde olmasını test ediniz.
- ÇÖZÜM:** verilere göre $H_0: \mu \leq 368$
 $H_A: \mu > 368$
 $\alpha = 0.05$ $n = 25$ $\sigma = 15$ $\bar{X} = 372.5$

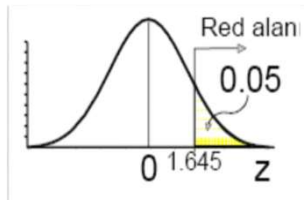
Prof.Dr. Fazıl GÖKGÖZ

19

.....

Veriler değerler formülde yerine yazılır ise;

$z = \frac{372.5 - 368}{15 / \sqrt{25}} = 1.5$ bulunur. Diğer taraftan $\alpha = 0.05$ için standart normal dağılım tablosundan $0.5 - 0.05 = 0.45$ değerine karşılık gelen $z^* = 1.645$ dir. $z = 1.5$ değeri taralı alanın dışında olduğundan null hipotezi kabul edilir.



YORUM: Mısır gevreklerinin kutularının ortalama 368gr'ın üzerinde olduğuna dair yeterli bir bilgi yoktur.

Prof.Dr. Fazıl GÖKGÖZ

20

ÖDEV


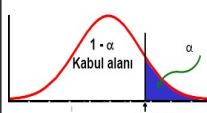
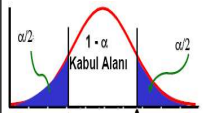
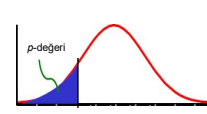
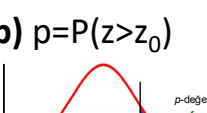
$H_0: \mu \leq 10$ VE $H_A: \mu > 10$ olmak üzere

- Hipotez testinin yönü nedir?
- Null hipotezi hakkında ne karar verilmelidir?
- Verilen karar ile ilgili güven durumu nasıldır?

(örnek ortalaması 12, örnekteki veri sayısı 36, popülasyonun standart sapması 3 ve risk derecesi %2dir.)

Prof.Dr. Fazıl GÖKGÖZ

21

Alternatif hipotez	Test istatistiği	α 'ya göre test kriteri	p değerine göre test kriteri
<p>a) $H_A: \mu < \mu_0$ (tek yönlü)</p> <p>b) $H_A: \mu > \mu_0$ (tek yönlü)</p> <p>c) $H_A: \mu \neq \mu_0$ (çift yönlü)</p>	<p>(H_0 hipotezinin doğru olduğu varsayılırsa)</p> $Z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ <p>veya</p> $Z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$	<p>a)</p>  <p>b)</p>  <p>c)</p> 	<p>a) $p = P(z < z_0)$</p>  <p>b) $p = P(z > z_0)$</p>  <p>c) $p = 2P(z > z_0)$</p> 