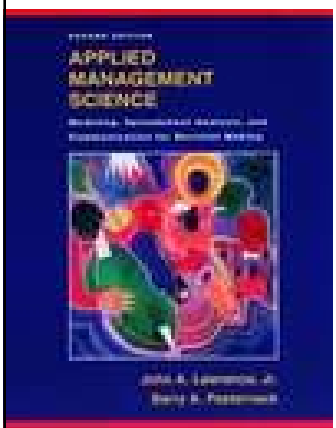
NİCEL ÇÖZÜMLEME YÖNTEMLERİ

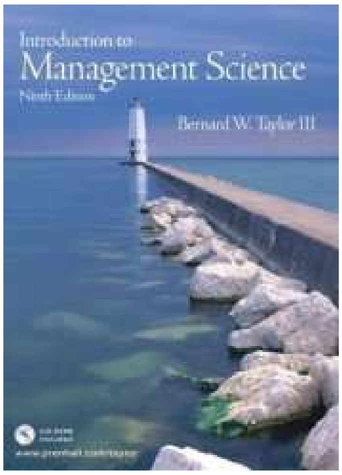
Ders Sorumlusu : Prof. *Dr.* Fazıl GÖKGÖZ,
İletişim Bilgileri : 312 595 13 37, e-posta: fgokgoz@ankara.edu.tr

Applied Management Science: Modeling, Spreadsheet Analysis, and Communication for Decision Making



2nd Edition
John A. Lawrence, Jr.
Barry A. Pasternack
ISBN: 0-471-39190-5
©2002
672 pages

Introduction to Management Science



Bernard W. Taylor
Prentice Hall; 9 edition
(February 1, 2006)

Nicel Karar Yöntemleri

Prof. Dr. Halil SARIASLAN

Prof. Dr. A. Argun KARACABEY

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

Formülasyon – Genel

Tam sayılı programlama yöntemini daha iyi anlayabilmek için öncelikle doğrusal programlama (DP) formülasyonunun benimsenmesi gerekir.

Model Formülasyonu :

İşletmeler sahip olduğu üretim faktörlerini (iş gücü, makine, para vd.) belirli çevresel faktörler içerisinde kullanarak **maksimum düzeyde üretim *(satış hasılatı)*** yapmayı veya **maliyetlerini minimize** etmeyi hedefler.

DP, işletmenin kısıtlı kaynaklarından doğan kısıtları altında doğrusal bir amaç fonksiyonu oluşturarak karar verilmesini sağlar.

Formülasyon – Genel

Amaç fonksiyonu

$Z = f(x)$

"Faaliyetlerin amacını lineer olarak ifade eder"

Kısıtlar

s.t.

$a.x \leq b$

$x \geq 0$

"Karar sürecindeki kısıtların doğrusal ilişki vardır, ayrıca kısıtların negatif olmama özelliği bulunur"

Formülasyon – Örnek 1

Örnek:

Bir işletmede üretilmekte olunan ürünlerin tamamı satmaktadır.Söz konusu üretimde gereken işlemler sırasıyla; K-B, D-K, P-R ve P-K olup, üretim sürelerine ilişkin veriler aşağıdadır.

Ürünler	İşlemler İlişkin Üretim Süreleri (saat)			
	K-B	D-K	P-R	P-K
Standart	7/10	1/2	1	1/10
Lüks	1	5/6	2/3	1/4

Formülasyon – Örnek 1

Muhasebe Birimi ; üretilen her "Lüks" ürünün 9$, üretilen her "Standart" ürünün ise 10$ düzeyinde toplam kara katkısının olduğunu ifade etmektedir.

Proje Birimine göre ise; yapılan projeksiyonlarda önümüzdeki 3 ay "K-B" işlemine 630 saat, "D-K" işlemine 600 saat, "P-R" işlemine 708 saat ve "P-K" işlemine 135 saat harcanabilecektir.

Bu verilerden hareketle, üretilmesi gerekli ürün miktarının tespitine yönelik olarak doğrusal programlamaya ilişkin formülasyonu yapınız.

Formülasyon – Örnek 1

Öncelikle karar değişkenleri tamınlanmalıdır.

Standart ürün : X_1 , Lüks ürün : X_2

Amaç fonksiyonu artık yazılabilir.

$Z = 10.\ X_1 + 9\ X_2$

s.t.

$$(7/10).X_1 + X_2 \leqslant 630$$
$$(1/2).X_1 + (5/6).X_2 \leqslant 600$$
$$X_1 + (2/3).X_2 \leqslant 708$$
$$(1/10).X_1 + (1/4).X_2 \leqslant 135$$
$$X_1, X_2 \geqslant 0$$

Formülasyon – Örnek 2

Bir üretim şirketi üç farklı tedarikçiden iki farklı bileşen satın almaktadır. Tedarikçi sınırlı bir kapasiteyi haiz olup, tedarikçilerden hiçbirisi tek başına şirketin ihtiyaçlarını karşılayamamaktadır.

Ayrıca, tedarikçiler her iki bileşene de farklı fiyat uygulamaktadır. Birim başına fiyatlar;

	Tedarikçinin Verdiği Fiyat ($/birim)		
Ürün Bileşeni	***1***	***2***	***3***
A	12	13	14
B	10	11	10

Formülasyon – Örnek 2

Tedarikçiler sınırlı kapasiteyle çalışmaktadır. Şirket ilave talepte bulunduğunda, toplam kapasitelerinin içerisinde olmak kaydıyla her tedarikçi kapasitesini bileşen 1'e, bileşen 2'ye veya bu iki bileşenin karışımına ayırabilmektedir. Tedarikçilerin kapasiteleri;

	Kapasiteler		
	1	***2***	***3***
Tedarikçi	600	1000	800

Formülasyon – Örnek 2

Şirket üretim periyodunda bileşen 1 ve 2'den sırasıyla 1000 ve 800 adet üretmeyi planlamaktadır. Bu kapsamda, her tedarikçiden alınacak bileşen miktarlarına yönelik DP formülasyonu yapınız.

Çözüm

Öncelikle değişkenlerin tanımlanması gerekir, indisli bir notasyonla işlem gerçekleştirilebilir.

X_{ij} = "j" tedarikçisinden talep edilen "i" bileşeninin sayısı

(i=1,2; j=1,2,3)

Formülasyon – Örnek 2

Amaç Fonskiyonu ve kısıtlar :

$Z = 12.X_{11} + 13.X_{12} + 14.X_{13} + 10.X_{21} + 11.X_{22} + 10.X_{23}$

s.t.

$X_{11} + X_{21} \leqslant 600$ $x_{11} + x_{12} + x_{13} \geqslant 1000$ $x_{ij} \geqslant 0$

$X_{12} + x_{22} \leqslant 1000$ $x_{21} + x_{22} + x_{23} \geqslant 800$

$X_{13} + x_{23} \leqslant 800$

"Kapasiteye ilişkin Kısıtlar" *"Talep ve negatif olmama kısıtları"*

Formülasyon ve Grafiksel Yöntem

Maksimizasyon Modeli Örneği

Beaver Ltd. şirketi aşağıda sunulan **kaynak ve kısıtlar altında** kase ve bardak üretiminde **karını maksimize etmeyi hedeflemektedir**.

Günlük olarak kullanılan kaynak miktarı sırasıyla; **40 saat işçilik** ve **120 kg kil** maddesidir.

Maksimizasyon Modeli Örneği

Ürün	**Kaynak İhtiyacı** *(birim başına)*		
	İşçilik (saat)	*Kil* (kg)	*Kar* ($)
Kase	1	4	40
Bardak	2	3	50

Maksimizasyon Modeli Örneği

Karar değişkenleri

x_1 : üretilecek kase #
x_2 : üretilecek bardak #

Amaç fonksiyonu

$$\boxed{\textbf{Maks. } Z = 40\,x_1 + 50\,x_2}$$

Maksimizasyon Modeli Örneği

Lineer Programlama Modeli

$$\text{Maks. } Z = 40\,x_1 + 50\,x_2$$

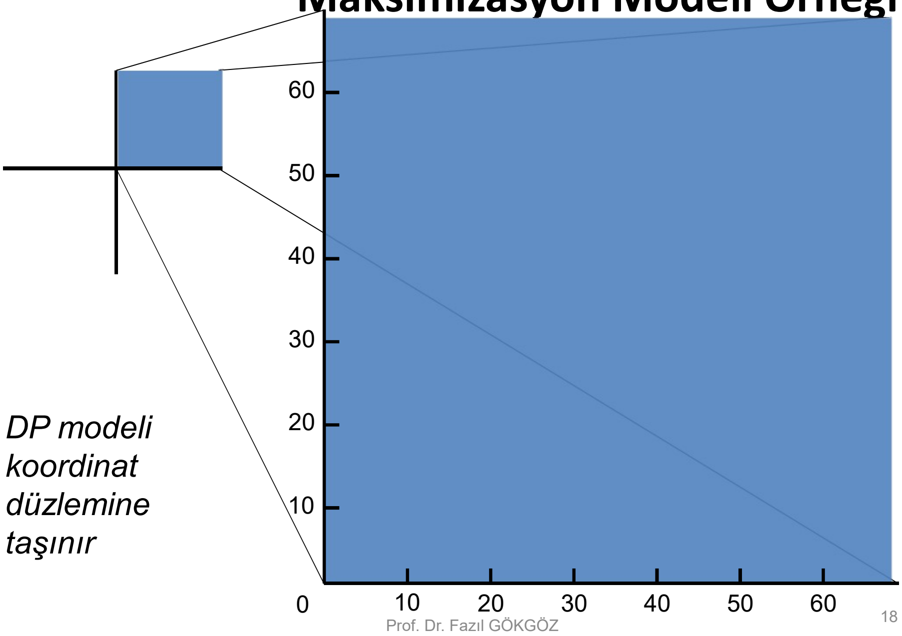
s.t.

$$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 40$$

$$4\,x_1 + 3\,x_2 \leq 120$$

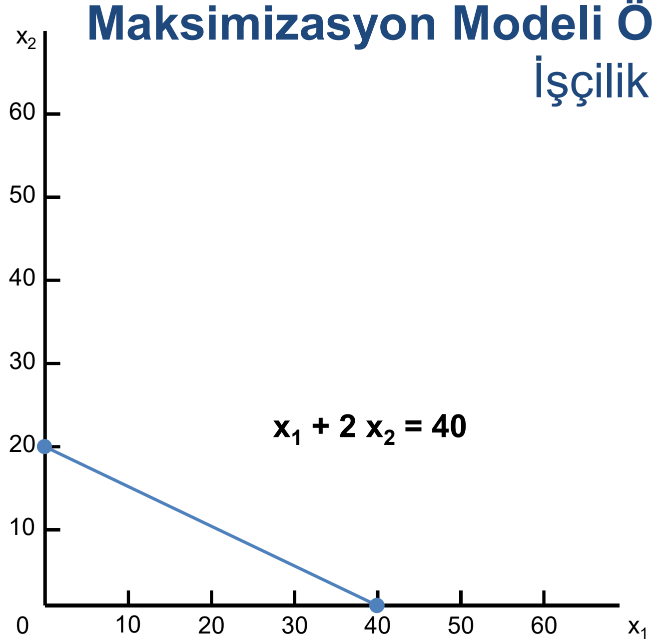
$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

Maksimizasyon Modeli Örneği

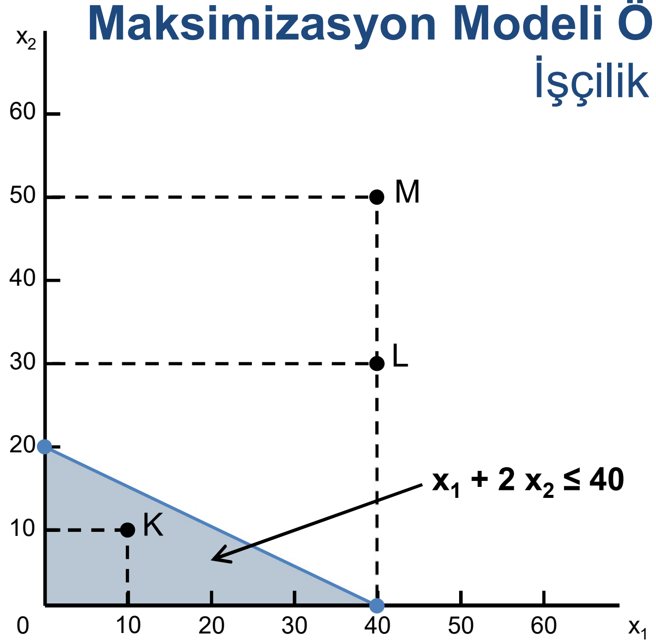


DP modeli koordinat düzlemine taşınır

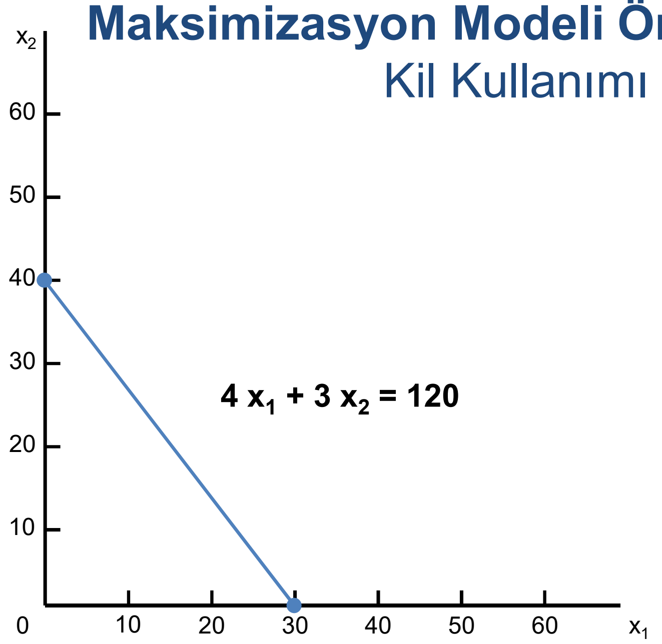
Maksimizasyon Modeli Örneği
İşçilik Kısıtı



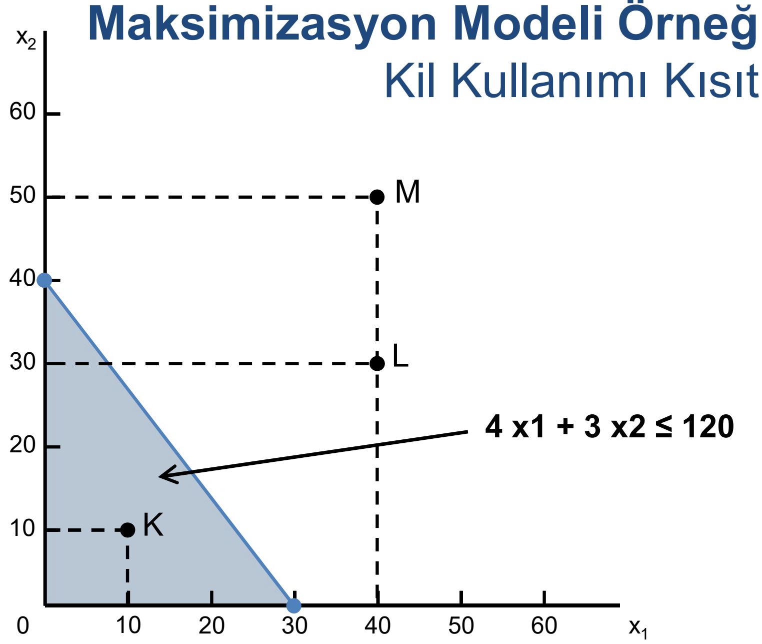
Maksimizasyon Modeli Örneği
İşçilik Kısıtı



Maksimizasyon Modeli Örneği
Kil Kullanımı Kısıtı

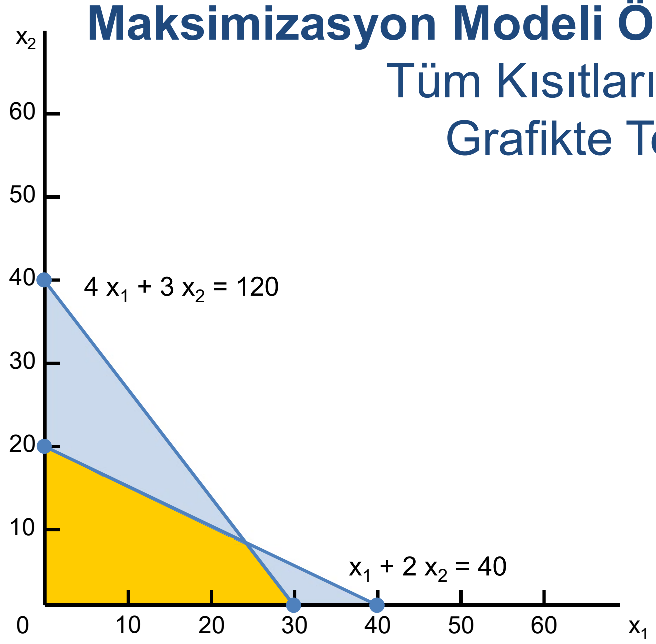


Maksimizasyon Modeli Örneği
Kil Kullanımı Kısıtı



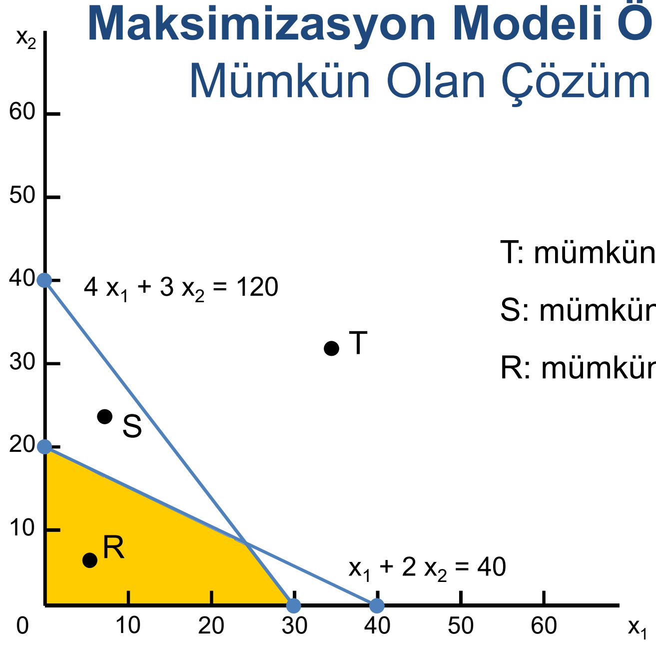
Maksimizasyon Modeli Örneği

Tüm Kısıtların Tek Grafikte Temsili



Maksimizasyon Modeli Örneği

Mümkün Olan Çözüm Alanı



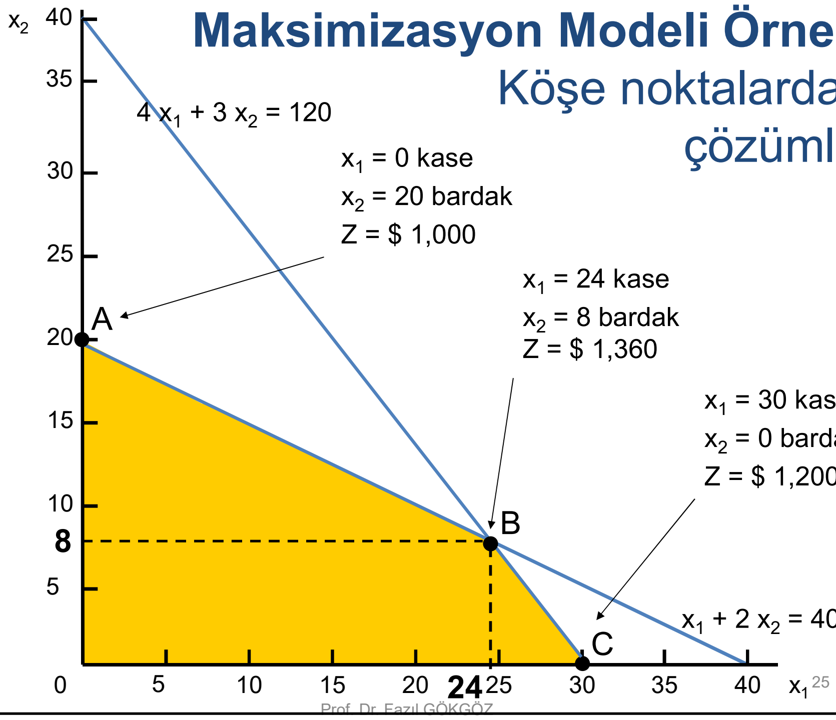
T: mümkün değil

S: mümkün değil

R: mümkün

Maksimizasyon Modeli Örneği

Köşe noktalardaki çözümler



Minimizasyon Modeli Örneği

- Bir çiftçi ekin alanını etkin kullanabilmek amacıyla en az **24 kg. nitrojen (N)** ve **16 kg. of fosfat (P)** maddesine gereksinim duymaktadır.
- Super-taneli gübrenin maliyeti torba başına $6 ve Hazır gübrenin maliyeti ise $3 düzeyindedir.
- Çiftçi toplam gübreleme maliyetini minimize edecek şekilde hangi üründen ne kadar alması gerektiğini belirlemek istemektedir.

Minimizasyon Modeli Örneği

	Kimyasal Bileşim	
Ürün Markası	*Nitrojen* (kg/torba)	*Fosfat* (kg/torba)
Super-taneli	4	2
Hazır	3	4

Minimizasyon Modeli Örneği
Lineer Programlama Modeli

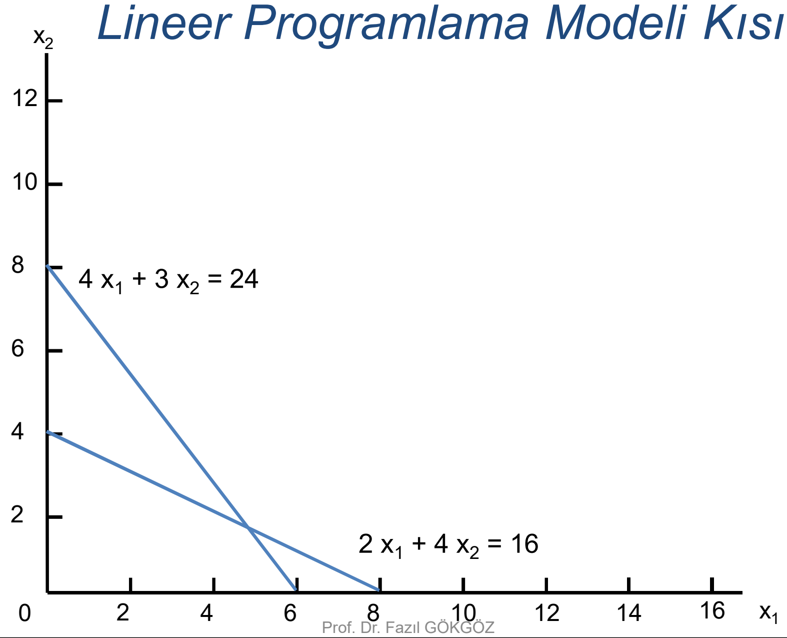
$$\text{Min. } Z = 6\,x_1 + 3\,x_2$$

s.t.

$$2\,x_1 + 4\,x_2 \geq 16$$
$$4\,x_1 + 3\,x_2 \geq 24$$
$$x_1,\, x_2 \geq 0$$

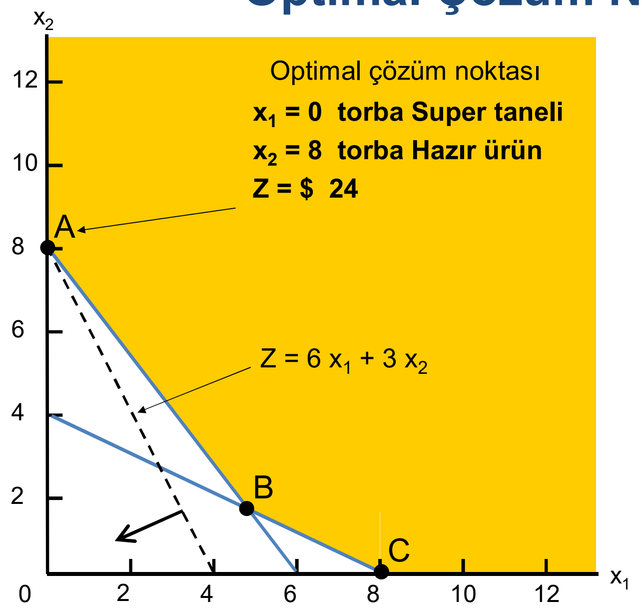
Minimizasyon Modeli Örneği

Lineer Programlama Modeli Kısıtları

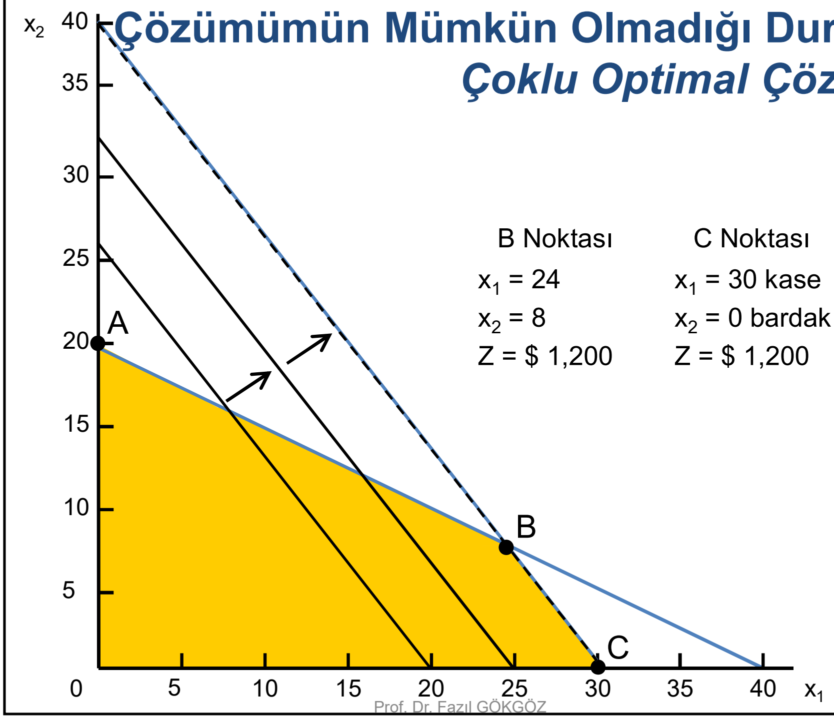


Mümkün olan çözüm alanı

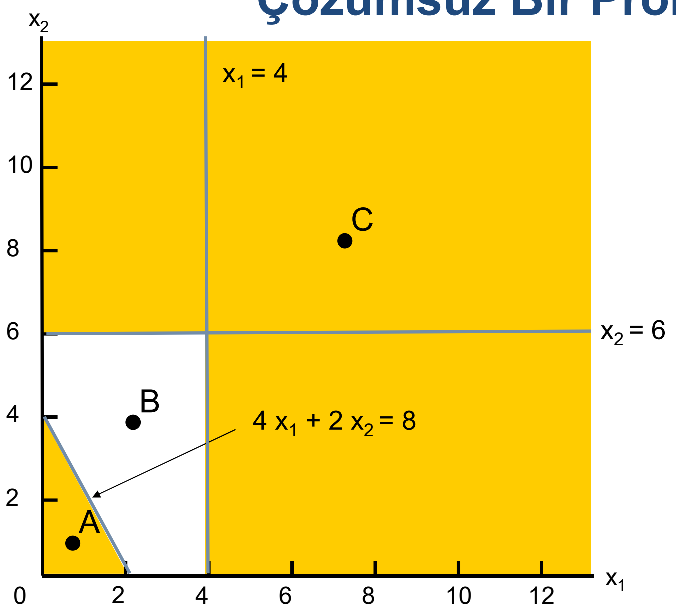
Optimal Çözüm Noktası



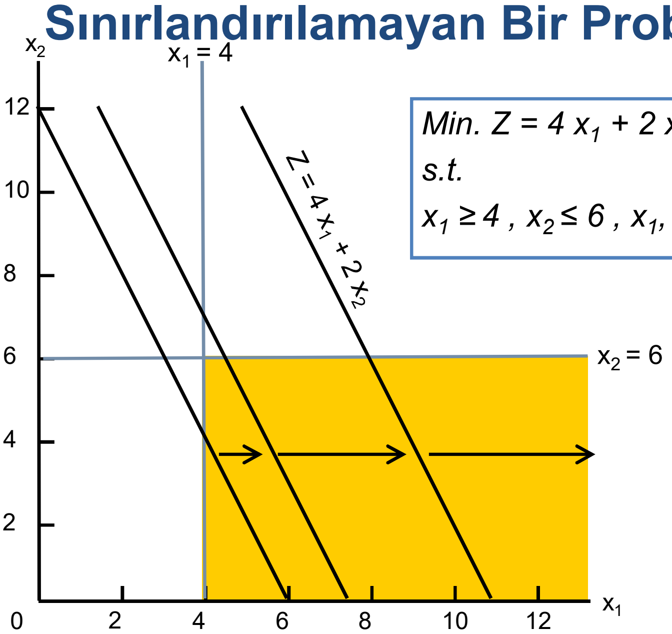
Çözümümün Mümkün Olmadığı Durumlar
Çoklu Optimal Çözümler



Çözümsüz Bir Problem



Sınırlandırılamayan Bir Problem



Min. $Z = 4\,x_1 + 2\,x_2$

s.t.

$x_1 \geq 4$, $x_2 \leq 6$, $x_1, x_2 \geq 0$

Tam Sayılı Programlama - Giriş

Bazı işletme sorunlarının doğrusal programlama ile çözülebilmesine rağmen **tam sayılı sonuç** alınması gerekir.

Örneğin; bir **fabrikanın kurulup kurulmaması**, bir **işçinin bir makinaya atanıp atanmaması** "1" ve "0" değerleri alan karar değişkenleri ile gerçekleşebilir.

Yukarıda bahsedilene benzer sorunlarda doğrusal programlamadaki **bölünebilirlik** ***(kesirli değerler)*** varsayımı varsayımı geçersizdir.

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

Tam Sayılı Programlama - Giriş

Karar değişkenlerinin tümü yada bir kısmı tamsayılı değerler almalıdır.

Örneğin; **7.67 personel** istihdam edilmesi, **3.4 banka** şubesinin kurulması bir anlam ifade etmez.

Kesirli değerler alan bu sayıları bir **alt sayıya yuvarlamak da optimal çözüm olmayabilir ve hatta uygun çözüm bölgesinde yer almayabilir**.

İşletmecilikte bazı karar problemleri **"evet-hayır"**, **"0-1"**,**"doğru-yanlış"**,**"satınalma-üretme"** gibi önermeleri içeren ikili değişken yapıda olabilir.

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

Doğrusal Programlama ile Tamsayılı Programlama arasındaki fark

$Z_{max} = 5X_1 + 4X_2$

s.t.

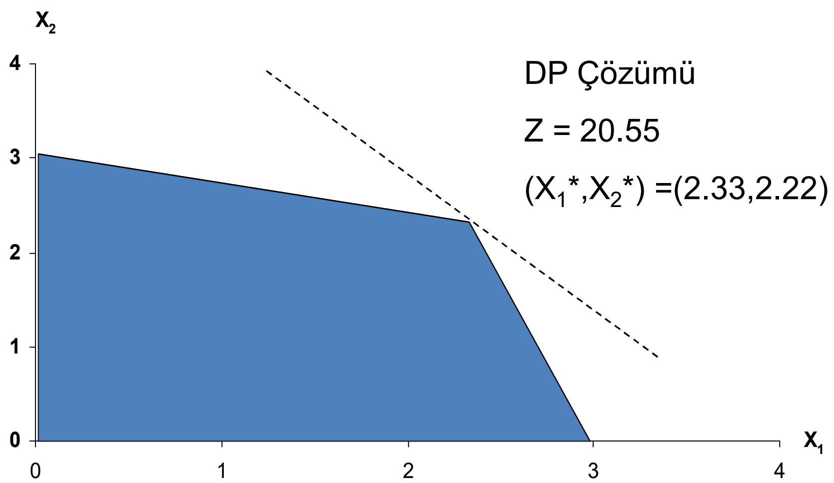
$10X_1 + 3X_2 \leq 30$

$X_1 + 3X_2 \leq 9$

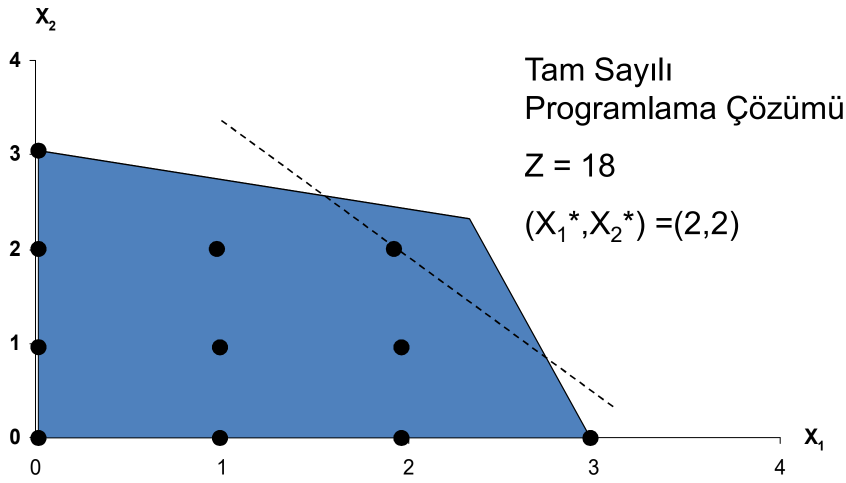
$X_{ij} \geq 0$

X_{ij} Tamsayı

Tam Sayılı Programlama - Giriş



Tam Sayılı Programlama - Giriş



Tam Sayılı Programlama Çözümü

Z = 18

$(X_1^*, X_2^*) = (2,2)$

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

Tam Sayılı Programlama - Giriş

Tam sayılı programlamada **modelin boyutu arttıkça çözüm de zorlaşmaktadır**.

DP'de, çözüm mutlaka **uç noktalardan** birisindedir ancak **Tam Sayılıda** böyle bir **şart bulunmaz**.

DP'de kullanılan **"Simplex"** tabanlı çözüm algoritmaları uygun bölgedeki **uç noktaları deneyerek** sürekli amaç fonksiyonunu iyileştirecek şekilde ilerler ve **optimallik testi** ile bir noktada (Z_{opt}) durur.

Ancak, **Tam Sayılıda** çözüm uygun bölgedeki **on binlerce tamsayı değerinden birisidir** ve DP'ye oranla olası çözüm noktası daha fazladır.

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

Tam Sayılı Programlama - Giriş

1) **Saf Tam Sayılı Programlama:** Bu tarz sorunlarda karar değişkenlerinin tümünün tam sayılı olması istenir, bu sorular arı tam sayılı programlama sorunlarıdır.

2) **Karma Tam Sayılı Programlama:** Bazı değişkenlerin tam sayılı değerler almasının istendiği sorunlardır.

3) **Sıfır-Bir Tamsayılı Programlama:** Değişkenler sadece iki değer alabilir.

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

Tam Sayılı Programlama - Formülasyon

Saf Tamsayılı Formülasyon

Maks. $Z = 10.X_1 + 25.X_2$

s.t. $X_1+X_2 \leq 20$ *(Soruda verilen kısıt)*

$X_1,X_2 \geq 0$ ve **Tamsayı**

Karma Tamsayılı Formülasyon

Maks. $Z = 10.X_1 + 25.X_2$

s.t. $X_1+X_2 \leq 20$ *(Soruda verilen kısıt)*

$X_1,X_2 \geq 0$ ve X_1; **Tamsayı**

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

Tam Sayılı Programlama - Formülasyon

Sıfır-Bir Tamsayılı Formülasyon

Maks. $Z = X_1 - X_2$

s.t.

$$\left.\begin{array}{l} X_1+2.X_2 \leq 2 \end{array}\right\} \textit{Soruda Verilen Kısıtlar}$$

$X_1+2.X_2 \leq 1$

$X_1,X_2 \geq 0$ ve ya 1

Tam Sayılı Programlama - Formülasyon

Kargo Yükleme Problemi

Bir kargo uçağı 20.000 kg'lık taşıma kapasitesini haizdir. Her uçuşta aşağıda sunulan kar düzeyine göre farklı ağırlıklar söz konusudur.

	Ağırlık (kg)	Toplam Kar (Bin YTL)
1	1000	100
2	4000	600
3	3000	400
4	2000	250

Tam Sayılı Programlama - Formülasyon

Her uçuş için kapasiteyi geçmeyecek şekilde toplam karı maksimize eden bir formülasyon yapınız.

Eğer "i." kalem taşınacaksa $x_1 = 1$
Eğer "i." kalem taşınmayacaksa $x_2 = 0$

Maks. $Z = 100.X_1 + 250.X_2 + 400.X_3 + 600.X_4$
s.t.

$1000.X_1 + 2000.X_2 + 3000.X_3 + 4000.X_4 \leq 20000$

(kapasite kısıtı)

$X_1, X_2 = (0,1)$

(Tam sayı kısıtı)

Tam Sayılı Programlama - Formülasyon

Sermaye Harcamalarını bütçeleme Problemi

Bir işletme aşağıdaki 4 yatırım teklifi ile karşılaşmıştır.

Her yatırımı 2 yıl içerisinde gerçekleştirmesi gereklidir.

Proje	Yıllık Yatırım Tutarı (M. YTL)	2 nci Yıl Yatırım Tutarı (M. YTL)	Projenin NPV'si (M. YTL)
1	3	2	8
2	2	2	5
3	1	2	5
4	2	1	4

Tam Sayılı Programlama - Formülasyon

Yatırımlar gelecek her iki yılda da 5 Milyon YTL olarak tahsis edilebilecekse; proje değerinin şimdiki değerini maksimize edecek yatım planının bulunmasına yönelik formülasyon yapınız.

Eğer "i." proje seçilecekse x_1 =1

Eğer "i." proje seçilmeyecekse x_2 = 0

Maks. $Z = 8.X_1 + 5.X_2 + 5.X_3 + 4.X_4$

s.t.

$3.X_1+2.X_2+1.X_3+2.X_4 \leq 5$ Milyon YTL *(1 nci Yıl kısıtı)*

$2.X_1+2.X_2+2.X_3+1.X_4 \leq 5$ Milyon YTL *(2 nci Yıl kısıtı)*

$X_1,....X_4 = 0$ veya 1 (*Tam sayı kısıtı)*

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

Tam Sayılı Programlama – Örnek

Mobilyacı Örneği

Sandalye ve koltuk üretiminde tahta ve boya kullanılmaktadır. Üretime yönelik kaynak ihtiyacı ile değişkenlerin kara olan katkıları aşağıdadır.

Ürünler	**Tahta (m^3)**	**Boya (kg)**	**Kar (YTL)**
Sandalye	3	1	275
Koltuk	4	½	300
Toplam	92	20	

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

Tam Sayılı Programlama – Örnek

Mobilyacı mümkün olan en yüksek karı sağlayacak olan üretim bileşimini öğrenmek istemektedir.

Karar değişkenleri :

X_1 : Üretilecek sandalye miktarı, X_2 : Üretilecek koltuk miktarı

Amaç Fonksiyonu :

$Z_{maks.} = 275.X_1 + 300X_2$

Kısıtlar :

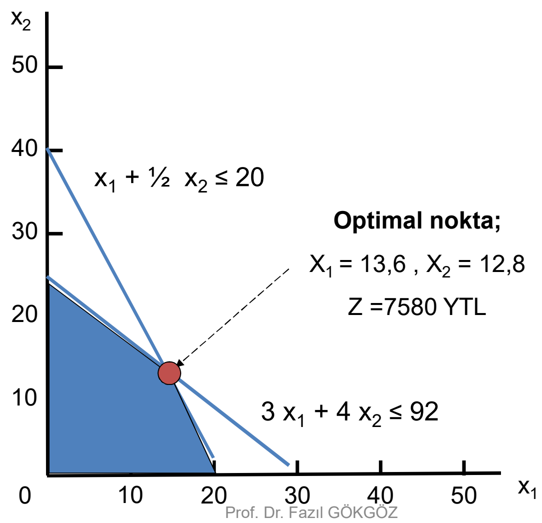
$3.X_1 + 4.X_2 \leq 92$ *"Toplam tahta miktarına yönelik kısıt"*

$X_1 + ½ X_2 \leq 20$ *"Toplam boya miktarına yönelik kısıt"*

$X_1, X_2 \geq 0$ ve tamsayı *"Negatif olmama ve tamsayı kısıtı"*

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

Tam Sayılı Programlama – Örnek



Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

Tam Sayılı Programlama – Örnek

Elde edilen değerler tam sayı olmadıklarından dolayı ilave bazı işlemlerin yapılması gereklidir.

Akla gelen en **kolay uygulama şekli eldeki değerleri en yakın tam sayıya yuvarlayarak optimal çözümü elde etmektir.**

Kuşkusuz çözüm değerleri kısıtlılıklara uygun olduğundan dolayı daha yüksek bir sayıya yuvarlama olasılığı yoktur. Bu nedenle, **yuvarlama işlemi ile uygun sonuca ulaşmak amacıyla bir alt tam sayıya yuvarlama** yapılabilir.

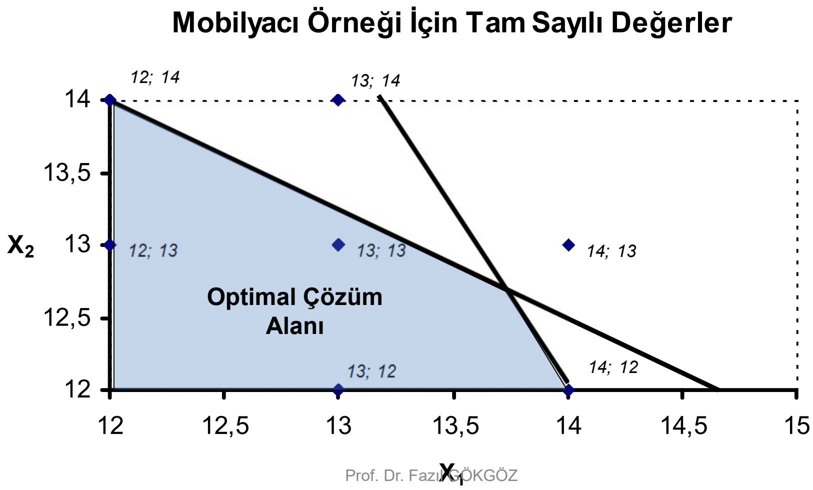
Tam Sayılı Programlama – Örnek

Bizim örneğimizde alt sayılara yuvarlama yapıldığı takdirde optimal sonuç 13 sandalye ve 12 adet koltuk şeklinde gerçekleşir. Ancak, aşağıdaki çeşitli yuvarlama alternatiflerini de göz önünde tutmak gerekir.

X_1	X_2	$Z_{Maks.}$ Değeri
12	13	7200
12	**14**	**7500**
13	12	7175
13	13	7475
13	**14**	**7775**
14	12	7450
14	**13**	**7750**

Tam Sayılı Programlama – Örnek

Yuvarlama sonucunda ulaşılan değerleri grafik üzerine taşıyabiliriz.



Tam Sayılı Programlama – Örnek 1

Grafikten görüldüğü üzere, sonuçları yorumlayacak olursak; belirlenen 7 noktanın bir kısmı optimal çözüm alanının dışında kalmıştır.

Temel amacımız, amaç fonksiyonunu maksimize eden ürün bileşimine ulaşmaktır. Bu durum da **grafiğin orijininden mümkün olduğunca uzakta olan çözümleri** gerektirir.

Bu çerçevede, optimal üretim alanı içerisindeki *(ve üzerindeki)* noktalardan, ***(12,14)*** noktası amaç fonksiyonu değerini 7500 YTL yaparak **mümkün olan en yüksek tamsayılı optimal çözümü** vermektedir.

Üretim değerleri çok büyük olan ve amaç fonksiyonuna birim katkıları çok düşük ürünlere ilişkin problemlerde yuvarlama işlemi uygulanabilir.

Tam Sayılı Programlama- DP Gevşetmesi

Bir Tam Sayılı DP modelinden tam sayı kısıtının kaldırılıp, sorunu DP olarak modelleyerek çözüme gidilmesine **DP gevşetmesi** denilir.

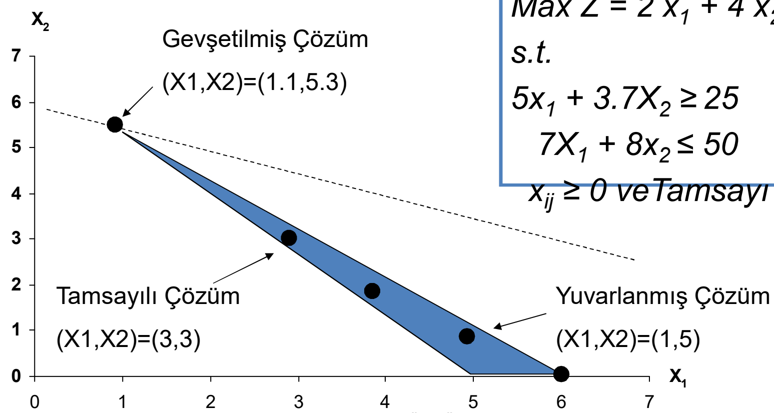
$Max\ Z = 2x_1 + 4x_2$

$s.t.$

$5x_1 + 3.7X_2 \geq 25$

$7X_1 + 8x_2 \leq 50$

$x_{ij} \geq 0$ ve Tamsayı



Tam Sayılı Programlama
Dal/Sınır Yöntemi

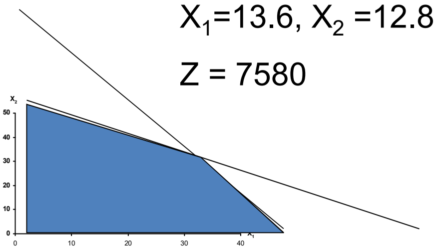
Mobilyacı örneğinde DP çözümü tam sayı olmadığından bizim istediğimiz değerde değildir.

Kesirli olan kısımları çözümden çıkarmalıyız.

DP çözümüne göre optimal nokta;

X_1=13.6, X_2 =12.8

Z = 7580



Tam Sayılı Programlama – Dal/Sınır Yön.

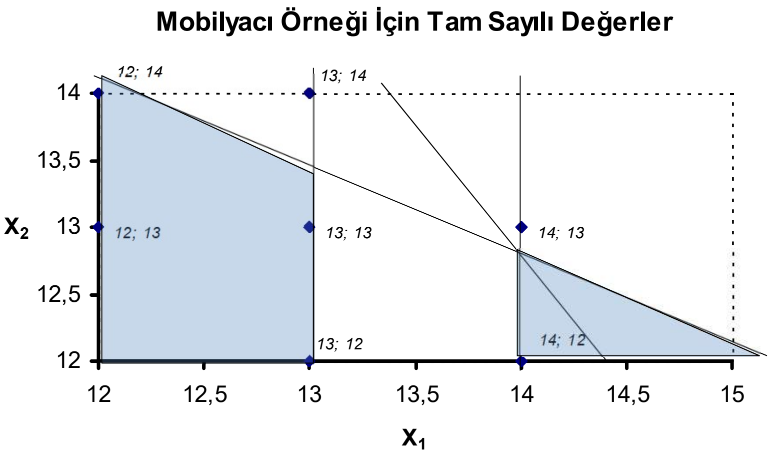
X_1'in alt ve üst değerlerini belirleyelim;

$13<X_1<14$ aralığında X_1 çözüm değeri alamaz, yani optimal çözüm söz konusu değildir ve bu aralık çözüm alanından çıkarılır.

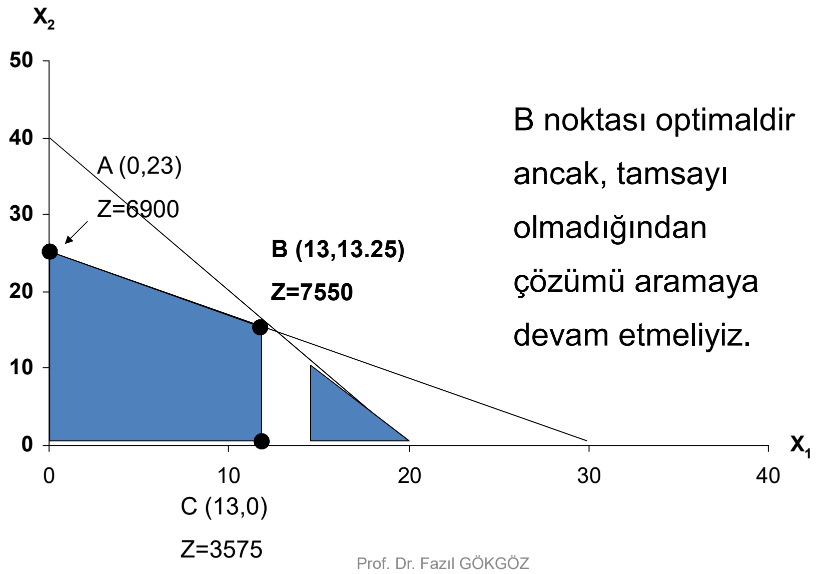
Artık iki yeni kısıttan söz edilebilir. ***$X_1 \leq 13$** ve **$X_1 \geq 14$***
Şimdi optimal üretim alanı iki ayrı bölgede aranacaktır.

Aşağıda ölçeği büyütülmüş haliyle grafik çözüm sunulmaktadır.

Tam Sayılı Programlama – Dal/Sınır Yön.



Tam Sayılı Programlama – Dal/Sınır Yön.

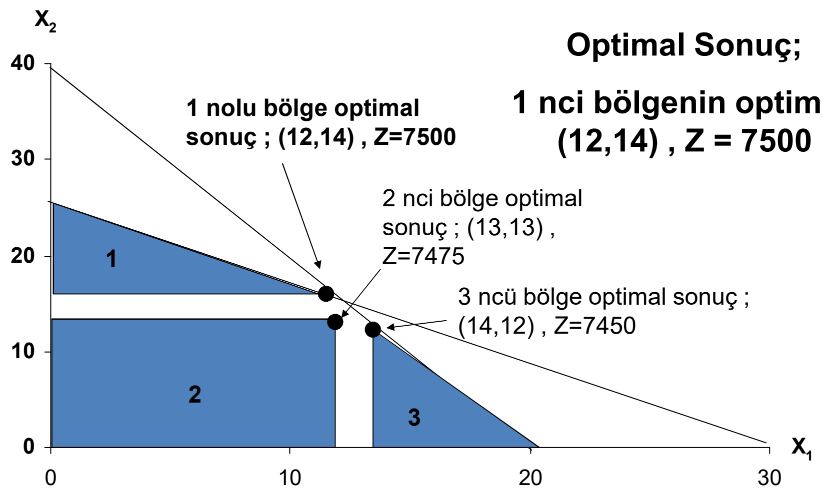


B noktası optimaldir ancak, tamsayı olmadığından çözümü aramaya devam etmeliyiz.

Tam Sayılı Programlama – Dal/Sınır Yön.

Optimal Sonuç;

1 nci bölgenin optimali (12,14) , Z = 7500



Tam Sayılı Programlama – Dal/Sınır Yön.

Örnek: Bir yatırımcı parasını **borsada** ve **yatırım fonunda** değerlendirecektir.

Hisse senedinin her bir **payı 55 YTL** olup, sene sonuna **68 YTL** olması bekleniyor. **Yatırım fonunun** ise yıllık **getirisi %9** seviyesindedir.

Yatırımcı **pasif portföy stratejisi** izleyecektir.

Hisse senedi yatırım miktarının; **ana parasının %40'ı** veya **750 YTL** arasında miktarı küçük olanı tercih eder.

Yatırımcının yıl sonu itibariyle **250 YTL kazandırabilecek portföy bileşiminin** belirlenmesine yönelik tamsayılı programlama formülasyonu yapınız ve çözümü gösteriniz.

Tam Sayılı Programlama – Dal/Sınır Yön.

Amaç: Toplam yatırım miktarının minimize edilerek en az 250 YTL kazanmak.

Yatırımın en fazla %40'ını veya 750 YTL'sini hisse senetlerine yatırmak.

X_1 : Hisse senedi pay #

X_2 : Yatırım fonuna yatırılan toplam para (YTL)

Tam Sayılı Programlama Formülasyonu:

Zmin. = $55X_1 + X_2$ *(Toplam Yatırım)*

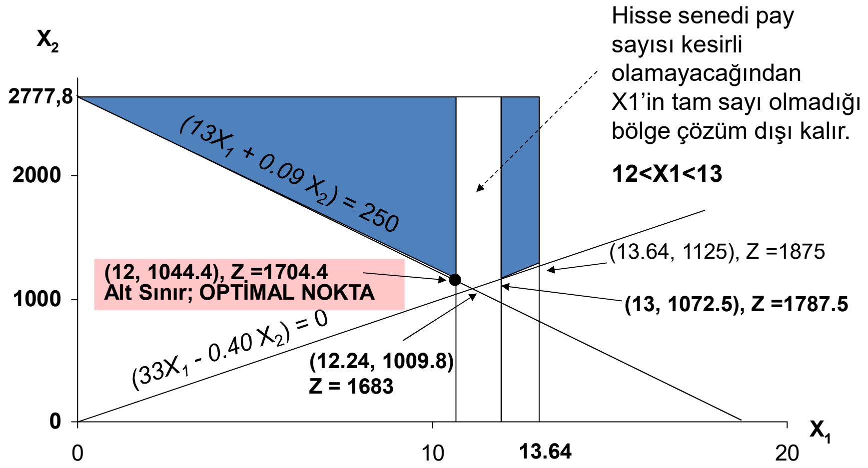
s.t. $13X_1 + 0.09X_2 \geq 250$ *(Minimum kazanç)*

$55X_1 \leq 750$ *(Hisse Senedi*

$55X_1 \leq 0.40\,(55X_1 + X_2)$ *Yatırımı)*

$X_1, X_2 \geq 0$ *ve tamsayı* *(Genel kısıtlar)*

Tam Sayılı Programlama – Dal/Sınır Yön.



Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

Tam Sayılı Programlama – Dal/Sınır Yön.

Örnek: Bir makine satıcısı pres (X_1) ve torna tezgahı (X_2) alacaktır. Her bir ürünün kara katkısı sırasıyla günlük olarak 100$ ve 150 $'dır. Satıcı yer darlığı ve maliyetler nedeniyle sınırlı sayıda ürün alabilir.

Makine	Gereken Alan (ft^2)	Satınalma Fiyatı ($)
Pres	*15*	*8,000*
Torna	*30*	*4,000*

Satıcının bütçesi 40,000 $ olup, depodaki yeri ise 200 ft^2'dir. Satıcı, mevcut kısıtlar altında hangi üründen ne kadar adet alırsa günlük karı en fazla olur ?

Tamsayılı Formülasyon:

$$Z_{max} = 100X_1 + 150X_2$$

$$\text{s.t. } 8{,}000X_1 + 4{,}000X_2 \leq 40{,}000$$

$$15\,X_1 + 30\,X_2 \leq 200\ ft^2$$

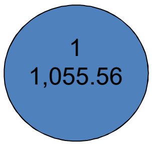
$$X_1, X_2 \geq 0 \text{ ve tamsayı}$$

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

Tam Sayılı Programlama – Dal/Sınır Yön.

Söz konusu örnek DP ile çözüldüğünde;
Z_{max} = 1,055.5 , X_1 = 2.22 ve X_2 = 5.56 bulunur.

Bu defa, çözümümüzde dal ve düğümler oluşturalım.



Üst Sınır
ÜS : 1,055.56 (X_1: 2.22, X_2: 5.56)
Alt Sınır
AS : 950 (X_1: 2, X_2: 5)

Üst sınır DP çözümü ile bulunan değer olup, alt sınır ise değişkenlerin aşağıya doğru yuvarlanması *(rounded down)* ile bulunur.

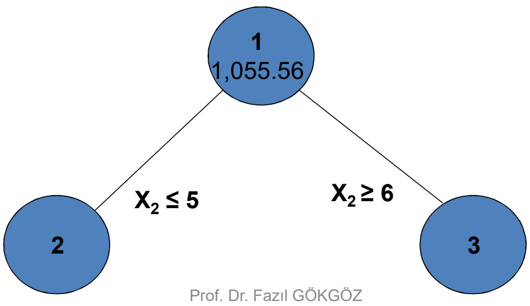
Optimal çözüm bu iki sınır arasında gerçekleşecektir.

Tam Sayılı Programlama – Dal/Sınır Yön.

X_1: 2.22 ve X_2: 5.56'dır. **X_2 daha büyük kesire sahip** olduğundan dolayı *(0.56)* **optimal çözümün aranacağı "dal"** olmaktadır.

Dolayısıyla, **$X_2 \leq 5$** ve **$X_2 \geq 6$** aralığında çözüm aranır *(Optimal nokta X_2 için 5 ile 6 arasında değer alamaz).*

Gevşetilmiş DP çözümü; **X_1 = 2, X_2 = 5 ve Z = 950 olup, alt sınır oluşturur. Diğer düğüm işlemlerinde de alt sınır olarak kabul edilecektir.**



Tam Sayılı Programlama – Dal/Sınır Yön.

2 nci düğüm için ;

$Z_{max} = 100X_1 + 150X_2$

s.t. $8{,}000X_1 + 4{,}000X_2 \leq 40{,}000$

$15\ X_1 + 30\ X_2 \leq 200\ ft^2$

$\mathbf{X_2 \leq 5}$

$X_1, X_2 \geq 0$

DP çözümü; **X_1 = 2.5, X_2 = 5 ve Z = 1,000**

Tam Sayılı Programlama – Dal/Sınır Yön.

3 ncü düğüm için ;

$Z_{max} = 100X_1 + 150X_2$

s.t. $8{,}000X_1 + 4{,}000X_2 \leq 40{,}000$

$15\ X_1 + 30\ X_2 \leq 200\ ft^2$

$\mathbf{X_2 \geq 6}$

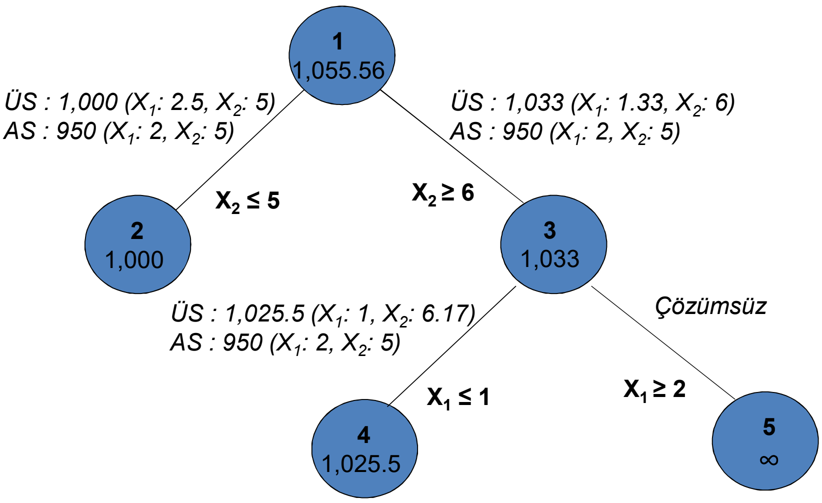
$X_1, X_2 \geq 0$

Gevşetilmiş DP çözümü; **X_1 = 1.33, X_2 = 6 ve Z = 1,033.33**

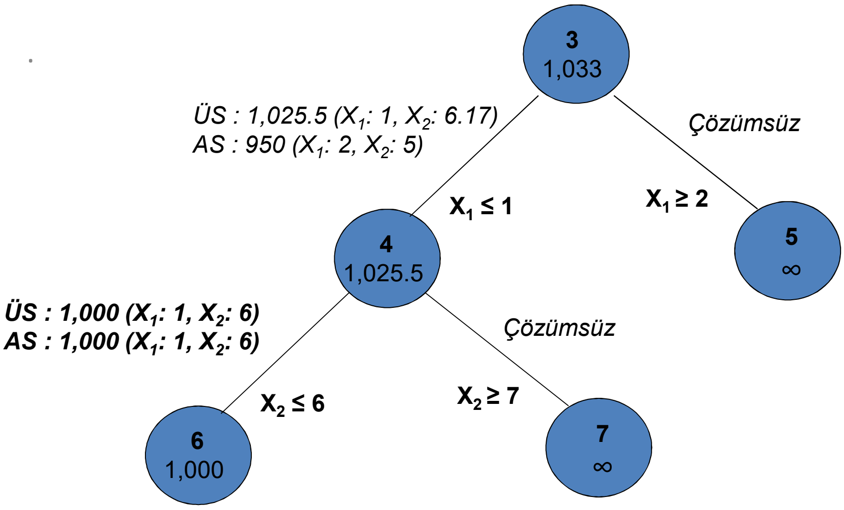
3 nolu düğümde amaç fonksiyonu daha yüksek değer aldığından çözüme buradan devam edilir.

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

Tam Sayılı Programlama – Dal/Sınır Yön.



Tam Sayılı Programlama – Dal/Sınır Yön.



Tam Sayılı Programlama – Dal/Sınır Yön.

Dal-Sınır yöntemiyle bulunan, optimal çözümü sağlayan gevşetilmiş doğrusal programlama modelimiz aşağıdaki hali alacaktır.

$Z_{max} = 100X_1 + 150X_2$

s.t. $8,000X_1 + 4,000X_2 \leq 40,000$

$15\ X_1 + 30\ X_2 \leq 200\ ft^2$

$\mathbf{X_2 \geq 6}$

$X_1 \leq 1$

$\mathbf{X_2} \leq \mathbf{6}$

$X_1, X_2 \geq 0$

Gevşetilmiş DP çözümü; **$X_1 = 1, X_2 = 6$ ve Z = 1,000 $**

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

Tam Sayılı Programlama – (0-1 TDP)

TSP'nin özel bir durumudur. Değişkenler yalnızca iki değer (0 veya 1) alabilir. İkili değişkenler *(Dual variables)* **"iyi-kötü"**, **"doğru-yanlış"**, **"kabul-red"** biçimde modellenir. **"0" olumsuz** durumu , **"1" ise olumlu** durumu yansıtır.

Örnek (TSP Formülasyon): 3 yıllık bir persfektifte, 3 farklı yatırım projesi değerlendirilecektir. Önümüzdeki 3 yıl boyunca uygulamaya konulacak projeyi belirleyiniz.

Proje	**Harcamalar**			
	1	**2**	**3**	**Getiri *(M. YTL)***
1	1	7	6	21
2	8	5	12	38
3	3	4	6	18
Kaynak *(M. YTL)*	15	14	18	

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

Tam Sayılı Programlama – (0-1 TDP)

Her proje içi verilebilecek karar bellidir. Proje **“kabul”** veya **“red”** edilecektir.

$\mathbf{X_i}$: 1, proje kabul edilir veya
0, proje red edilir

$Z_{max.} = 21\, X_1 + 38\, X_2 + 18\, X_3$ *(Getirinin maksimizasyonu)*

s.t. $1\, X_1 + 8\, X_2 + 3\, X_3 \leq 15$
$7\, X_1 + 5\, X_2 + 4\, X_3 \leq 14$
$6\, X_1 + 12\, X_2 + 6\, X_3 \leq 18$
$Xi = (0,1)$

(Projelerin nakit çıkışları yıllık bütçe sınırı içinde olmalıdır)

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

Tam Sayılı Programlama

Bir işletmenin müşteri ilişkileri bölümüne her gün gelen telefon sayısı ile bunların cevaplanması için gereken eleman sayısı günlük bazda aşağıdadır.

Personel politikası gereğince **her eleman 5 gün üst üste çalışıp akabinde 2 gün izin kullanmaktadır**.

Günlük gerekli sayıda eleman bulundurulması kaydıyla toplam eleman sayısını minimize eden planlamayı yapınız.

Günler	Telefon Sayısı (‘000)	Eleman Sayısı
Pazar	58	8
Pazartesi	42	6
Salı	35	5
Çarşamba	25	4
Perşembe	44	6
Cuma	51	7
Cumartesi	68	9

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

Tam Sayılı Programlama

Amacımız işletmede en az sayıda personel çalıştırarak gereken işgücü ihtiyacını karşılamaktır.

Karar değişkenlerimizi tanımlayalım

X_1: Pazar günü işe başlayan eleman #
X_2: Pazartesi günü işe başlayan eleman #
X_3: Salı günü işe başlayan eleman #
X_4: Çarşamba günü işe başlayan eleman #
X_5: Perşembe günü işe başlayan eleman #
X_6: Cuma günü işe başlayan eleman #
X_7: Cumartesi günü işe başlayan eleman #

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

Tam Sayılı Programlama

$Z_{min.} = X_1 + X_2 + X_3 + X_5 + X_6 + X_7$

s.t.

$X_1 + X_2 + X_3 + X_5 + X_6 + X_7 \geq 8$ *(Pzr. günü gereken personel #)*
$X_1 + X_2 + X_3 + X_5 + X_6 + X_7 \geq 6$ *(Pts. günü gereken personel #)*
$X_1 + X_2 + X_3 + X_5 + X_6 + X_7 \geq 5$ *(Salı günü gereken personel #)*
$X_1 + X_2 + X_3 + X_5 + X_6 + X_7 \geq 4$ *(Çrş. günü gereken personel #)*
$X_1 + X_2 + X_3 + X_5 + X_6 + X_7 \geq 6$ *(Prş. günü gereken personel #)*
$X_1 + X_2 + X_3 + X_5 + X_6 + X_7 \geq 7$ *(Cuma günü gereken personel #)*
$X_1 + X_2 + X_3 + X_5 + X_6 + X_7 \geq 9$ *(Cmts. günü gereken personel #)*
$X_1 , X_2 , X_3 , X_5 , X_6 , X_7 \geq 0$ ve tamsayı

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

Tam Sayılı Programlama – (Ödev -1)

$\mathbf{Z_{max.} = 2\,X_1 + 3\,X_2}$

s.t. $-3\,X_1 + 1.3\,X_2 \leq 4$

$3\,X_1 + X_2 \leq 10$

$X_{ij} \geq 0$ *ve tamsayı*

Yukarıdaki amaç fonskiyonu ile kısıtları dikkate alarak;

a) Gevşetilmiş doğrusal programlama çözümünü,
b) Tamsayılı programlama çözümünü,
c) Yuvarlatılmış çözümü

gerçekleştirerek aynı grafikte gösteriniz.