Kuyruk Teorisi

Bölüm 1
Temel Kavramlar

KONU 8

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

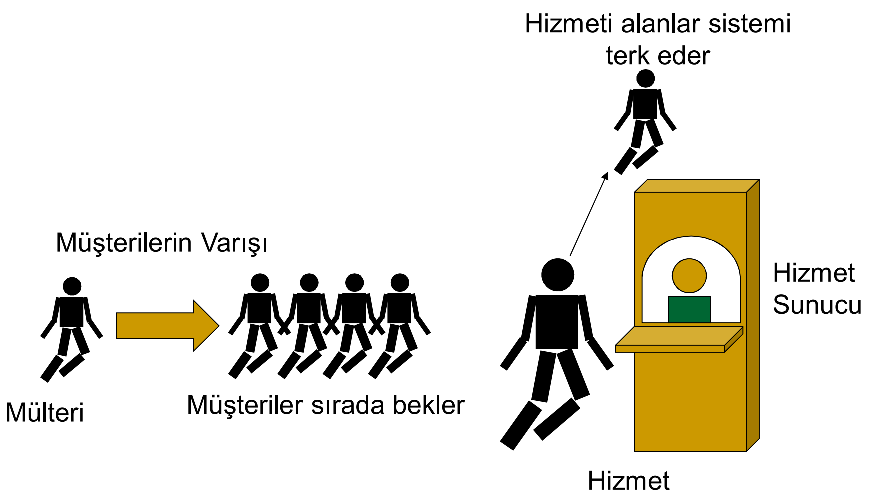
Kuyruk Teorisi'nin Bileşenleri

Varışlar:
Müşteriler sisteme belirli bir varış yapısında girerler

Kuyrukta Bekleme :
Müşteriler sırada veya sıralarda hizmet almak için beklerler

Hizmet :
Mülşterilerin hizmeti alması ve müteakiben sistemi terk etmeleri gereklidir

İşletmelerde Kuyruk Sistemi



Varış Süreci

1. Deterministik Varış Süreci

2. Rassal Varış Süreci

Poison Dağılımı

Poison Dağılımına Bağlı Olan Varışlar için Koşullar

Düzenlilik – Müşteri hizmet imkanından heran faydalanabilir

Durağanlık– Bekleme hattı her müşteri için aynı zaman ve uzuluktadır, durağandır

Bağımsızlık – Müşteriler birbirinden bağımsız olarak sisteme giriş yaparlar

Poison Dağılıma Bağlı Varışlar

t süresinde **k** varışın olma olasılığı

$$\boxed{P(X=k)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}}$$

λ = birim zamanda ortalama varış hızı
t = zaman
e = 2.7182818
k! = k (k-1) (k-2) (k-3) . . . (3) (2) (1)

Örnek - Bilgisayar Donanım Problemi

Müşteriler Poison dağılıma uygun varış yapmaktadır.

Salı 8:00-9:00 = 6 müşteri (ortalama) ise;

8:00-8:30 Saatleri arasında varış yapma olasılığı nedir ?

Örnek - Bilgisayar Donanım Problemi

λ = 6 müşteri varışı / saat

t = 30 dk. = 0.5 saat

λ t = 6(0.5) = 3 müşteri

Örnek - Bilgisayar Donanım Problemi

$$P(X=k)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

P(X=0) = 3^0 e^{-3} / 0! = e^{-3} = 0.049787

P(X=1) = 3^1 e^{-3} / 1! = $3e^{-3}$ = 0.149361

P(X=2) = 3^2 e^{-3} / 2! = $9e^{-3}/2$ = 0.224042

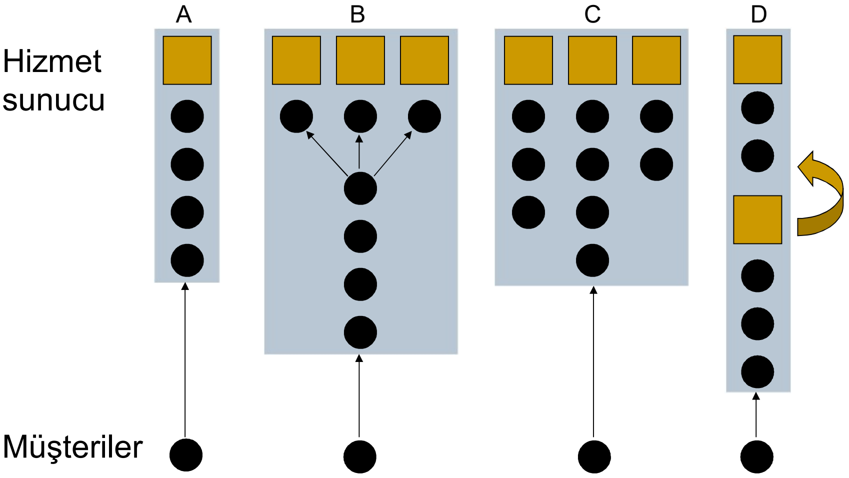
P(X=3) = 3^3 e^{-3} / 3! = $27e^{-3}/6$ = 0.224042

P(X=4) = 3^4 e^{-3} / 4! = $81e^{-3}$ /24= 0.168031

1 - 0.049787 - 0.149361 = **0.800852** (~80.1 %)

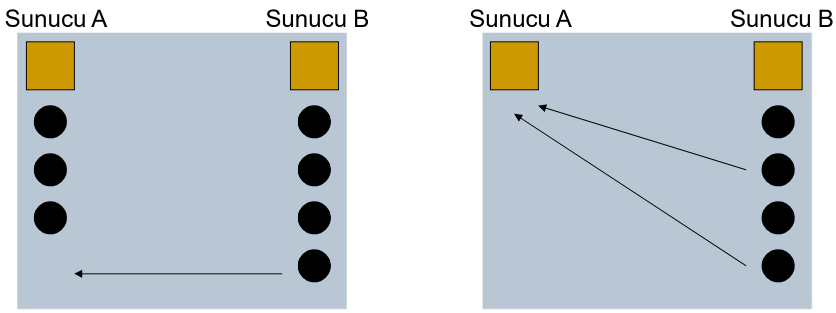
Bekleme Hattı

Hat şekli (bir tane uzun bekleme hattı veya birkaç tane kısa hat)



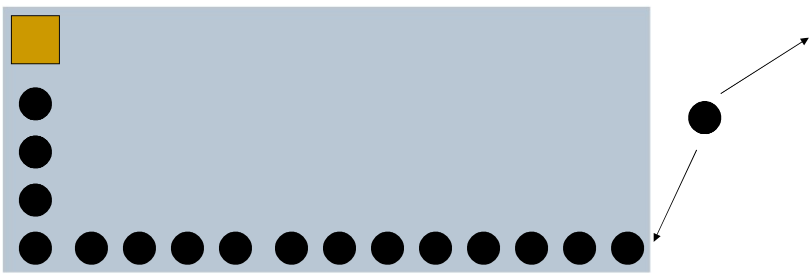
Bekleme Hattı

Kuyruk Atlama (Müşteriler arası kuyruk atlama yapısı)



Bekleme Hattı

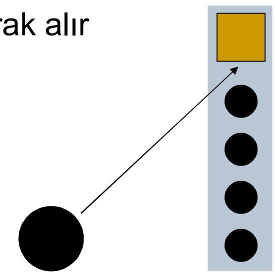
Katılmama (kuyruk yeterince uzun olduğunda müşterinin hatta girmekten vazgeçmesi)



Bekleme Hattı

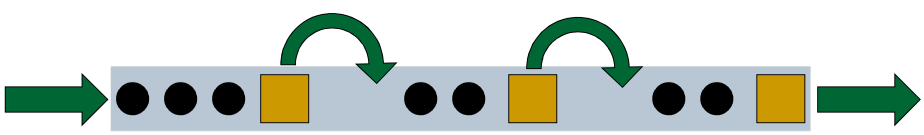
Öncelik (müşterilerin hizmet görme sıraları farklılık gösterebilir)

İlk gelene, hizmet ilk olarak verilir (FCFS)
Son gelene, hizmet en son verilir (LCFS)
Rassal gelen, hizmeti rassal olarak alır



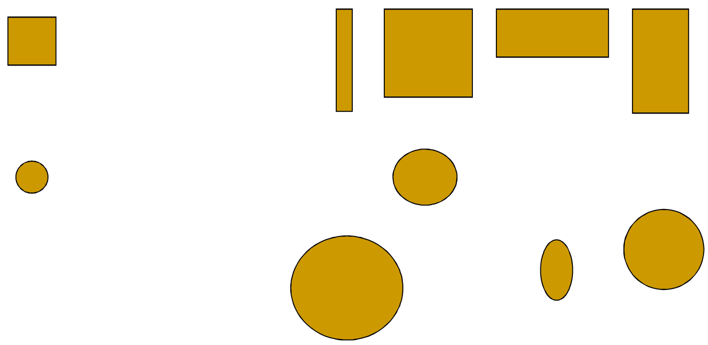
Bekleme Hattı

Atlamalı Bekleme Hatları (ikinci bir hat gerekli olduğunda kullanılır, araç muayene istasyonları)



Bekleme Hattı

Homojen sıralar (Tüm müşteriler aynı seviyede hizmet ihtiyacındadır)



Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ 15

Hizmet Süreci

1. **Deterministik Hizmet Süreci**

2.Rassal Hizmet Süreci

Üssel Olasılık Dağılımı

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ 16

Üssel Hizmet Dağılımının Süreye Bağlılığı

$$\boxed{f(X) = \mu e^{-\mu X}}$$

μ = ortalama servis hızı *(birim zamanda hizmet sunulabilen ortalama müşteri sayısı)*

1 / μ = ortalama servis zamanı

"t" süresinde hizmetin tamamlanma olasılığı

$$\boxed{P(X \le t) = 1 - e^{-\mu t}}$$

Örnek - Bilgisayar Donanım Problemi

Hizmet süresi = 4 dk.

Üssel dağılım

Servis zamanının < 3 dk.'dan kısa olma olasılığı ?

Örnek - Bilgisayar Donanım Problemi

Ortalama servis zamanı = $1/\mu$ = 4 dk.
Ortalama servis hızı = μ = 1/4 müşteri / dakika
Bir hizmetin 3 dk.'dan kısa verilme olasılığı ;

3 dk.'yı saate çeriverelim, 3/60 = 0.05 saat

$P(X<0.05) = 1 - e^{-15 \times 0.05} = 1 - e^{-0.75}$
$= 1- 0.47237 =$ **0.52763**

$$\boxed{P(X \le t) = 1 - e^{-\mu t}}$$

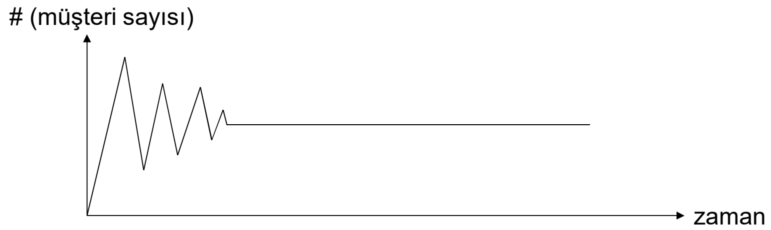
Modeldeki Formüllerin Özeti

Varışlar		Hizmet	
Varış hızı	$\boxed{\lambda}$	Hizmet hızı	$\boxed{\mu}$
"t" sürede "k" varışını olma olasılığı	$\boxed{\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}}$	"t" sürede "k" hizmetin verilme olasılığı	$\boxed{\frac{(\mu t)^k e^{-\mu t}}{k!}}$
Varışlar arasındaki ortalama zaman	$\boxed{1/\lambda}$	Ortalama hizmet zamanı	$\boxed{1/\mu}$
Herhangi bir varışın "t" süre.inde gerçekleşme olasılığı	$\boxed{1-e^{-\lambda t}}$	Hizmetin "t" süresinde tamamlanma olasılığı	$\boxed{1-e^{-\mu t}}$
Müteakip varışın "t" zamanı içinde oluşmama olasılığı	$\boxed{e^{-\lambda t}}$	Servis süresinin "t" süresinden büyük olma olasılığı	$\boxed{e^{-\mu t}}$

Kesikli ve Sabit Durum Süreleri

Kesikli Süreç :Başlangıçtaki kesikli sistem yapısı uzun vadede sistemi temsil edememektedir.

Sabit Süreç :Uzun vadeli olasılıklar durağan bir hal sürecinde gerçekleşmektedir. Diğer ifadeyle, sistemde "n" müşteri bulunma olasılığı zamana karşı uzun vadede sabittir.



Durağan Hale Ulaşmak için Bazı Gereklilikler

Sistem	**Gereklilik**
Tekli hizmet sunucu	$\lambda < \mu$
k sunucu, farklı hizmet hızları	$\lambda < \mu_1 + \mu_2 + .. + \mu_k$
k sunucu, aynı hizmet hızı	$\lambda < k\,\mu$

Durağan Hal Performans Ölçütleri

P_0: Sistemde müşteri olmama olasılığı

P_n: sistemde "n" müşteri olma olasılığı

L: Sistemdeki ortalama müşteri sayısı

L_q: Sıradaki ortalama müşteri sayısı

W: Sistemde bir müşteri tarafından harcanan ortalama zaman

W_q: Sırada bir müşteri tarafından harcanan ortalama zaman

P_w: Varış yapan müşterin hizmet almak için bekleme olasılığı

ρ **:** Hizmet hattının kullanım hızı (hatların meşguliyet oranı, %)

Little Modeli

Kuyruk teroisi kapsamındaki performans kriterleri arasında karşılıklı ilişkileri "Little" formülleriyle çözümlemek mümkündür.

$$L = \lambda W$$

$$L_q = \lambda W_q$$

$$L = L_q + \lambda / \mu$$

Kuyruk Sistemlerinin Gösterimi

Varış Süreci / Hizmet Süreci/ Sunucu Sayısı

M *Markoviyan*
D *Deterministik*
G *Genel*

M / D / 5

M / D / 5 / 10 / 20

M / M / 1 Kuyruk Sistemi

Özellikler

Gelişler Poison dağılımdadır
Hizmet süresi Üssel dağılım sergiler
Tekli hizmet sunucu vardır
Kuyruk potansiyel olarak sonsuz uzunluktadır
Gelen müşteri sayısı sonsuzdur

Performans Ölçütleri

$P_0 = 1 - (\lambda / \mu)$

$P_n = [1 - (\lambda / \mu)] (\lambda / \mu)^n$

$L = \lambda / (\mu - \lambda)$

$L_q = \lambda^2 / [\mu(\mu - \lambda)]$

$W = 1 / (\mu - \lambda)$

$W_q = \lambda / [\mu(\mu - \lambda)]$

$P_w = \lambda / \mu$

$\rho = \lambda / \mu$

Bir müşterinin, sistemde "t" süresinden fazla bekleme olasılığı ;

$P(X>t) = e^{-(\mu - \lambda)t}$

Örnek – Ayakkabı Şirketi

Müşteriler, **12 dakikada bir ortalama hızda** ve **posion dağılıma** uygun olarak varış yapmaktadır.

Servis hızı ortalama **8 dk. / müşteri**

Şirket yönetimi; bu hizmet için **performans düzeyinin belirlenmesini** istemektedir.

Örnek – Ayakkabı Şirketi - Çözüm

Veriler

λ = 1/ 12 müşteri / dk. = 60/ 12 = 5 müşteri/saat
μ = 1/ 8 müşteri / dk. = 60/ 8 = 7.5 müşteri/saat

Performans Hesaplamaları

$P_0 = 1 - (\lambda / \mu) = 1 - (5 / 7.5) = 0.3333$
$P_n = [1 - (\lambda / \mu)] (\lambda / \mu) = (0.3333)(0.6667)n$
$L = \lambda / (\mu - \lambda) = 2$
$L_q = \lambda^2 / [\mu(\mu - \lambda)] = 1.3333$
$W = 1 / (\mu - \lambda) = 0.4$ saat = 24 dk.
$W_q = l / [\mu(\mu - \lambda)] = 0.26667$ saat = 16 dk.
$P_w = \lambda / \mu = 0.6667$
$\rho = \lambda / \mu = 0.6667$