

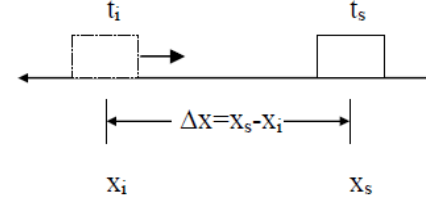
## İki Boyutta Hareket

Cismin sadece bir boyutta hareket etmeyip bir düzlem üzerinde hareket ettiğini düşünelim.

Bu durumda yapacağımız şey, cismin hareketini dik koordinat sistemi kullanarak her bir eksen üzerinde (x ve y) ayrı ayrı incelemek ve hareketin her bir eksendeki izdüşümlerini kullanarak yer değiştirme, hız ve ivme niceliklerini vektörel olarak en genel bir şekilde ifade etmek olacaktır.

Her bir eksen üzerindeki hareket diğer eksen üzerindeki hareketi etkilemeyeceği için eksenler üzerindeki izdüşümleri birbirlerinden bağımsız olacaktır.

### i) Bir Boyutta Hareket



Konum  $x_i$ : İlk konum  
 $x_s$ : Son konum

a) *Yerdeğiştirme:*  $\Delta x = x_s - x_i$

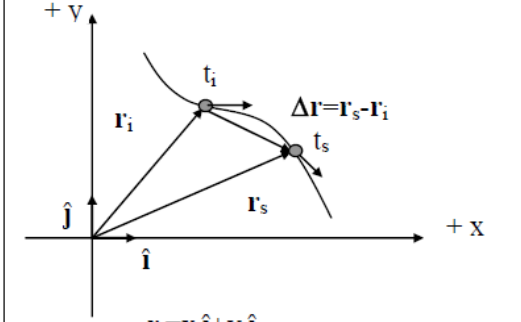
b) *Ortalama Hız*  $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

c) *Ani Hız*  $v \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$

d) *Ortalama İvme*  $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

e) *Ani İvme*  $a \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$

### ii) İki Boyutta Hareket



$\mathbf{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j}$   
 $\mathbf{r}_s = x_s \hat{i} + y_s \hat{j}$

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_s - \mathbf{r}_i = (x_s - x_i) \hat{i} + (y_s - y_i) \hat{j}$$

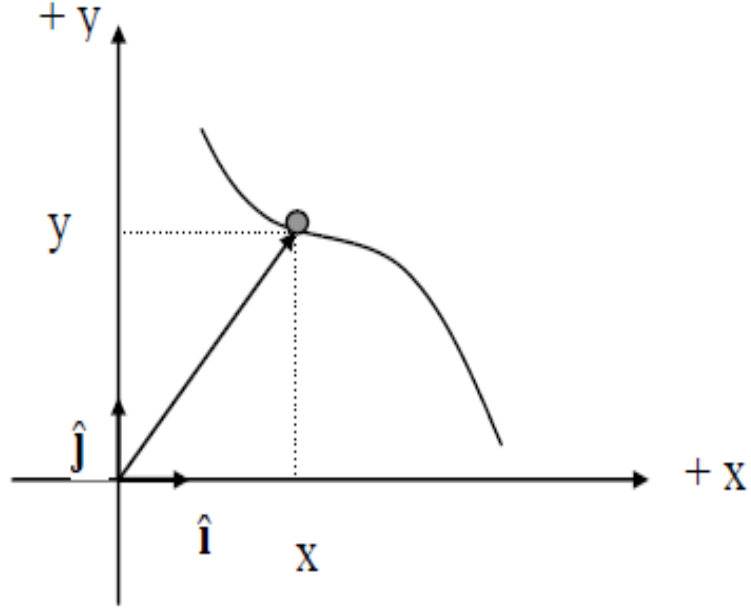
$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j}$$
$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{v}_x \hat{i} + \bar{v}_y \hat{j}$$

$$\mathbf{v} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x \hat{i} + \Delta v_y \hat{j}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \hat{j}$$
$$\bar{\mathbf{a}} = \bar{a}_x \hat{i} + \bar{a}_y \hat{j}$$

$$\mathbf{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

## İki Boyutta Sabit İvmeli Hareket



xy düzleminde hareket eden bir parçacık için konum vektörünü  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$  şeklinde yazabiliriz. Parçacığın x- ve y-eksenlerindeki konum izdüşümleri, parçacık hareket ederken zaman içerisinde değişir. Dolayısıyla ile konumun zamanla nasıl değiştiğine bakarsak cismin hızını buluruz.

Parçacığın hızını vektörel olarak  $\mathbf{v} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}}$  şeklinde yazabiliriz. Buradaki  $v_x$  ve  $v_y$  parçacığın hızının x- ve y-eksenlerindeki izdüşümüdür (bileşenidir).

Aynı şekilde hızın zaman içerisindeki değişimine bakarsak hareketli cismin ivmesini vektörel olarak;  $\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}}$  şeklinde yazabiliriz. Parçacığın ivmesi sabit olarak kabul edildiği için ivmenin  $a_x$  ve  $a_y$  bileşenleri sabit olacaktır.

☐

Daha önce türetilen kinematik denklemlerini hız vektörünün hem x hem de y bileşenlerine uyarlırsak:

Hızın  $v = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$  şeklinde yazılabildiğinden bunun **x bileşeni**  $v_x = v_{0x} + a_x t$  ve **y bileşeni**  $v_y = v_{0y} + a_y t$  olur. Vektörel olarak yazarsak  $\vec{v} = (v_{0x} + a_x t) \hat{i} + (v_{0y} + a_y t) \hat{j}$  veya  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$

Aynı şekilde sabit ivme ile hareket eden bir parçacığın x ve y koordinatları:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \left(\frac{1}{2}\right)a_x t^2$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \left(\frac{1}{2}\right)a_y t^2$$

Vektörel olarak  $\vec{r} = r_x \hat{i} + r_y \hat{j}$   $\vec{r} = (x_0 + v_{0x}t + \left(\frac{1}{2}\right)a_x t^2) \hat{i} + (y_0 + v_{0y}t + \left(\frac{1}{2}\right)a_y t^2) \hat{j}$  veya

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \left(\frac{1}{2}\right)\vec{a}t^2$  şeklinde yazılabilir.

## Eğik Atış Hareketi

Çünkü eğik atışta cisim xy düzleminde hareket etmektedir. Dolayısı ile eğik atış problemini y-ekseni boyunca sabit ivmeli hareket ( $a_y=-g$ ) ve x-ekseni boyunca ivmenin sıfır olduğu ( $a_x=0$ ) bir boyutlu iki hareketin bileşkesi olarak düşünebiliriz.

*Eğik atış problemini daha detaylı olarak incelerken;*

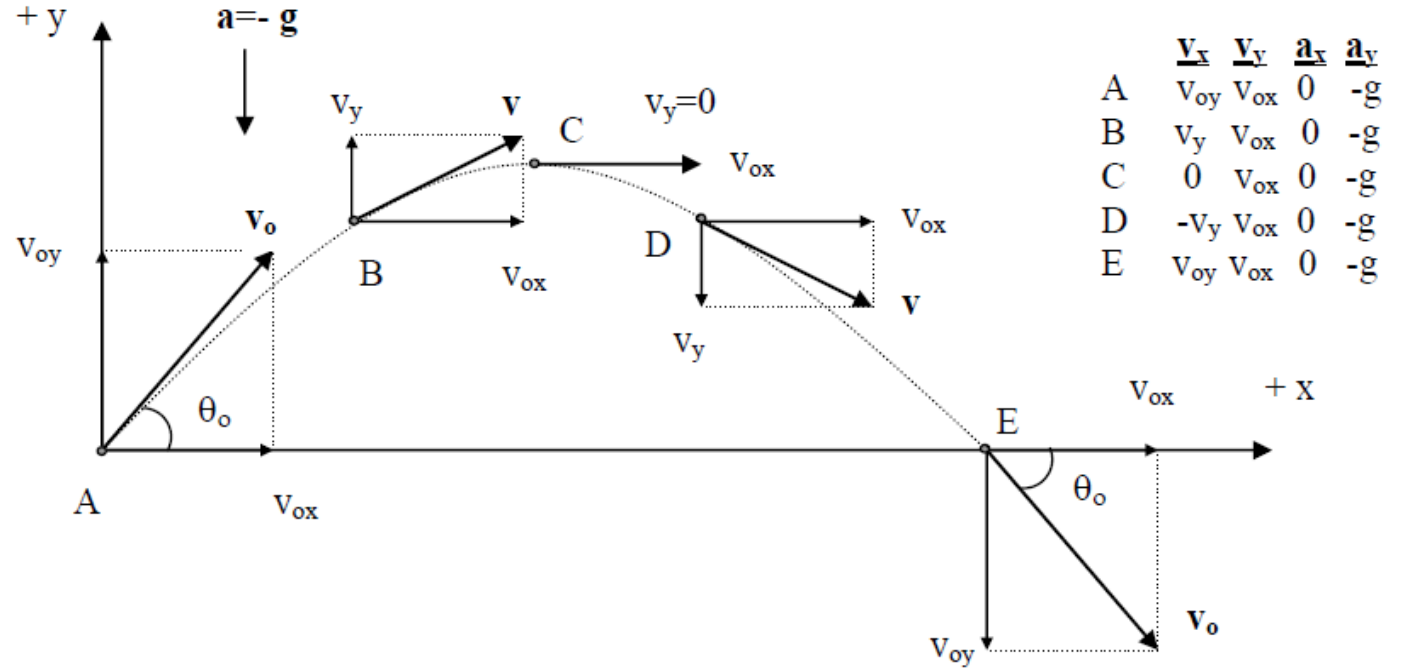
- Yerçekimi ivmesinin sabit olduğu kabul edilecek
- Hava direncinin etkisi ihmal edilecek

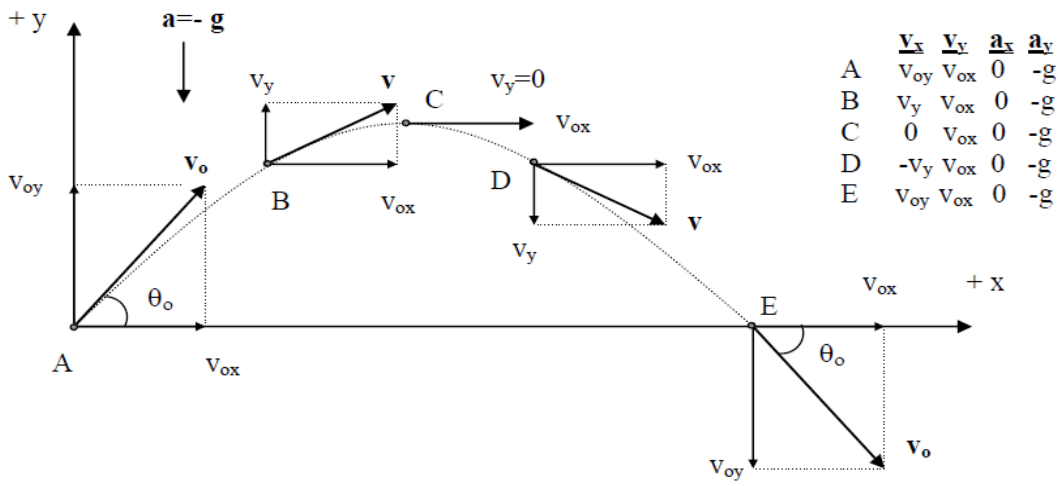
*İvme*  $a_x=0$  ve  $a_y=-g$

*Başlangıç Konumu*  $x_0=y_0=0$

?

Eğik atış problemini geometrik olarak incelersek





Cisim A noktasından  $v_0$ 'lık bir ilk hız ile atıldığında hızın x ve y eksenine boyunca izdüşümleri:

$$\cos\theta_0 = v_{0x}/v_0 \quad \sin\theta_0 = v_{0y}/v_0 \text{ olduğundan hız bileşenleri;}$$

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta_0 \text{ şeklindedir.}$$

□

*x- eksenine boyunca alınan yol:* x eksenine boyunca cismin ivmesi sıfır olacağından hızın x bileşeni  $v_{0x}$  zamanla değişmez.

$$a_x=0 \text{ ise } x = v_{0x}t = (v_0 \cos\theta_0)t \quad (1)$$

*y-eksenine boyunca alınan yol:*

$$a_y=-g \text{ ise } y = v_{0y}t - (1/2)gt^2 = (v_0 \sin\theta_0)t - (1/2)gt^2 \quad (2)$$

□

Eğik atışta hareketin yörüngesini, cismin havada kalma süresini (1) eşitliğinden bulup (2) eşitliğinde yerine koyarsak.

(1)'den  $t = x/(v_0 \cos\theta_0)$  bunu (2) de yerine yazalım

$$y = (\tan\theta_0)x - \left(\frac{g}{2v^2 \cos^2\theta_0}\right)x^2 \text{ elde ederiz.} \quad \square$$

Görüldüğü gibi bu en genel olarak  $y=Ax^2+Bx$  şeklinde bir parabol denklemdir. Yani eğik atışta cismin izlediği yol xy düzleminde her zaman bir parabol şeklindedir.

Burdaki katsayılar;

$$B = \tan\theta_0$$

$$A = \left(\frac{g}{2v^2 \cos^2\theta_0}\right)$$

□

**Örnek:** İlk hızının düşey bileşeni 60m/s, yatay bileşeni 20 m/s olacak şekilde bir top fırlatılmaktadır. Toplam havada kalma zamanını (uçuş zamanını) ve topun yere düştüğünde fırlatılış noktasından olan uzaklığını bulunuz.

**Çözüm:**  $v_{ox}=20$  m/s  $a_x=0$  m/s<sup>2</sup>  $v_{oy}=60$  m/s  $a_y=-9,8$  m/s<sup>2</sup>

Hız vektörel olarak  $\mathbf{v}=\mathbf{v}_0-\mathbf{gt}$  şeklinde yazılır.

Hızın y bileşeni:  $v_y=v_{oy}-gt$  olduğundan ve tepe noktasında  $v_y=0$  olacağından

$$0=v_{oy}-gt_A \text{ ise } t_A=v_{oy}/g=(60 \text{ m/s})/(9,8 \text{ m/s}^2)=6.12 \text{ s}$$

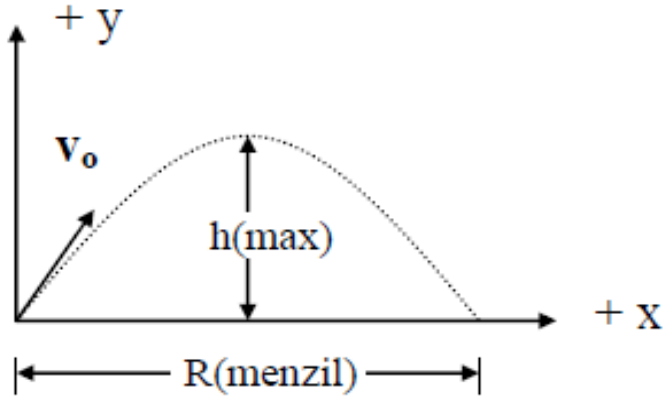
Toplam geçen zaman  $t=2t_A=2.(6.12\text{s})=12,24\text{s}$

$t=12,24$  s süresince x yer değiştirmesi

$$x= v_{ox} \cdot t$$

$$x=(20 \text{ m/s}).(12,24 \text{ s})=244,8 \text{ m}$$

## Eğik Atışta Cismin Menzili Ve Maksimum Yüksekliği



Eğik atışta tepe noktasında hızın y bileşeni  $v_y=0$  olacağından, buradan cismin ulaşacağı maksimum yüksekliği bulabiliriz. Bu bilgiyi kullanarak öncelikle maksimum yüksekliğe ( $h$ ) ulaşması için geçen zamanı ( $t_A$ ) bulmaya çalışırsak  $v_y=v_{oy}-gt_A$  ve  $v_{oy}=v_0\sin\theta_0$  olduğu hatırlanırsa bu iki denklemden  $t_A=(v_0\sin\theta_0)/g$  bulunur.

Maksimum yükseklik

$$y = v_{oy}t - (1/2)gt^2$$

$$y = (v_0 \sin\theta_0)t - (1/2)gt^2$$

$t=t_A$  da  $y=h$  olur.

Dolayısı ile

$$y = (v_0 \sin\theta_0) \cdot (v_0 \sin\theta_0 / g) - (1/2)g(v_0 \sin\theta_0 / g)^2 \quad h = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta_0)}{2g}$$

$R$  menzili ( cismin atıldığı noktadan yere düştüğü nokta arasındaki mesafe) ise, tepe noktasına ulaşmak için geçen zamanın iki katında yani  $t_B=2t_A$  zamanı içinde  $x$  eksenini boyunca alınan mesafeye eşit olacaktır;

$$x = v_{ox}t = (v_0 \cos\theta_0)t$$

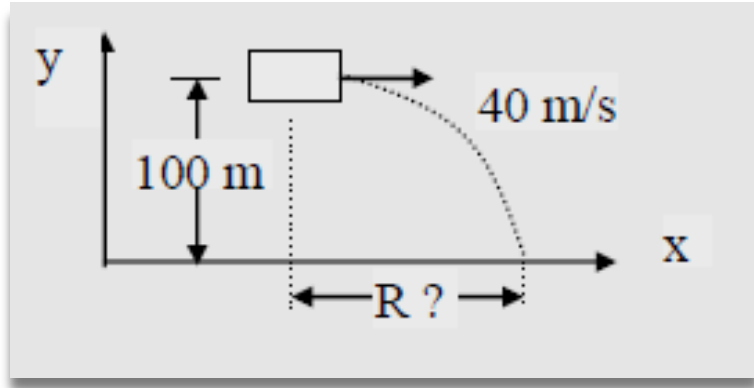
$$t_B = 2t_A \text{ da } x = R \text{ olur.}$$

$$R = (v_0 \cos\theta_0)2t_A = (v_0 \cos\theta_0)(v_0 \cos\theta_0 / g)$$

$$R = \frac{2v_0^2 \sin(\theta_0) \cos\theta_0}{g}$$

**Ornek:** Bir uçak zor durumdaki bir kısım kaşife acil kumanya paketi atıyor. Uçak yerden 100 m yükseklikte 40 m/s hızla yatay olarak yol alıyor ise paket bırakıldığı noktaya göre nerede yere çarpar?

**Çözüm:**



$$v_{ox}=40 \text{ m/s} \quad v_{oy}= 0 \text{ m/s} \quad x=v_{ox}t$$

Eğer paketin havada bulunduğu t süresi bilinirse, paket tarafından yatay doğrultuda alınan yol, x mesafesi, bulunabilir. Paketin yere düştüğü an y doğrultusunda alınan yol 100 m olacaktır.  $y=100 \text{ m}$  olacaktır ( $y=0$  olana kadar)

$$y = y_0 + v_{oy}t - (1/2)gt^2$$

$v_{oy} = 0$  Ve  $y_0=100 \text{ m}$  olacağından  $0=100\text{m}-(1/2)gt^2 \Rightarrow t=4,5$  saniye bulunur.

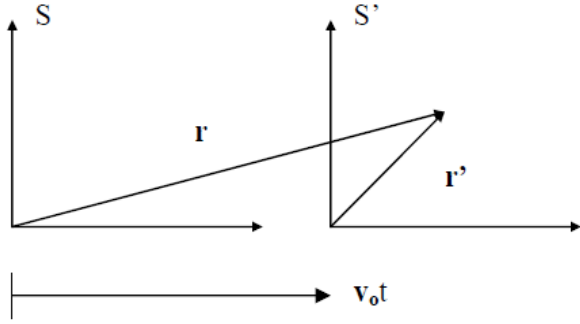
$x=v_{ox}t=R$  olduğundan  $R=(40\text{m/s}).(4,5\text{s})=181 \text{ m}$  bulunur.



## Bağıl Hız ve Bağıl İvme

Bir hareketin, farklı referans sistemlerinde bulunan farklı iki gözlemciye göre nasıl değişiklik gösterdiğini inceleyelim:

Diyelim ki durağan gözlem çerçevesimiz S, hareketli gözlem çerçevesimiz de S` olsun.  
S` gözlem çerçevesimiz durağan çerçeveye göre  $v_o$  hızı ile ivmesiz hareket yapsın:

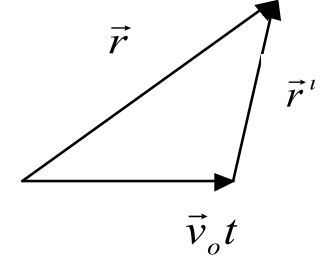


$\vec{r}$ : parçacığın S sistemine göre konumu  
 $\vec{r}'$ : parçacığın S' sistemine göre konumu  
 $\vec{v}_o$ : S' referans sisteminin S referans sistemine göre hızı

S` hareketli gözlem çerçevesinde hareketli olan cismin:

Durağan gözlem çerçevesine (S) göre konumu  $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_o t$

Hareketli gözlem çerçevesine (S`) göre konumu  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_o t$  şeklinde olacaktır.



Hareketli cismin gözlem çerçevelerinde gözlenen hızları arasındaki ilişki;

$$v' = \frac{dr'}{dt} = \frac{dr}{dt} - v_o \text{ veya } \vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_o \text{ olduğu bulunur.}$$

Gözlenen ivmeler arasındaki ilişki ise;

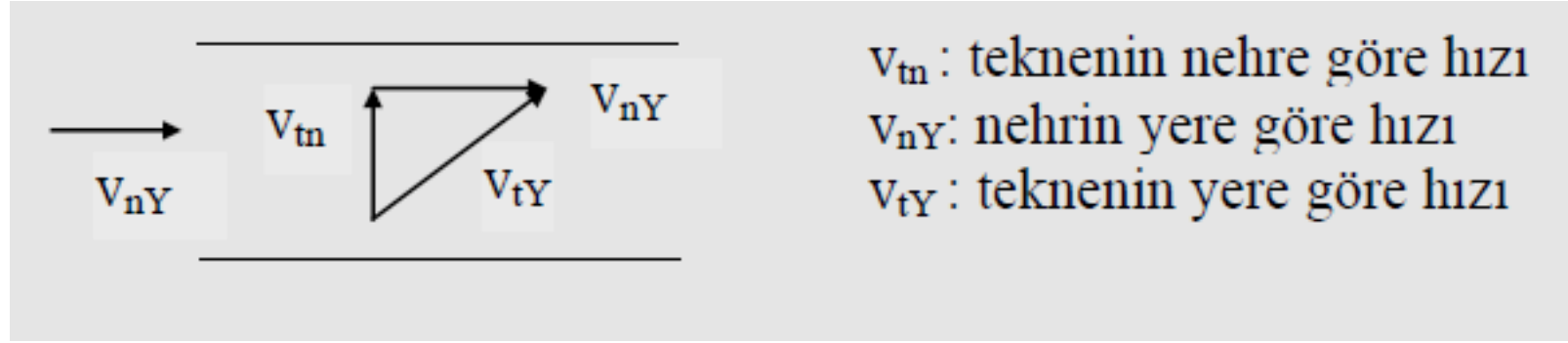
$$a = \frac{dv'}{dt} = \frac{dv}{dt} - \frac{dv_o}{dt} \quad \frac{dv_o}{dt} = 0 \text{ olduğundan } \vec{a} = \vec{a}' \text{ olarak bulunur.}$$

Bu sonuçlar göstermektedir ki birbirlerine göre sabit bir hızla (ivmesiz) hareket eden gözlem çerçevelerinde parçacığın ivmesi her iki gözlem çerçevesinde de aynı; fakat hızı, gözlem çerçevelerinin birbirlerine göre hızları kadar farklı olacaktır.

Burada türetilen bağıl ifadeler sadece birbirlerine göre sabit hızla (ivmesiz) hareket eden gözlem çerçeveleri için geçerli olup, ivmeli gözlem çerçeveleri için geçersizdir.

**Örnek:** Kuzeye yönelen bir tekne, geniş bir nehri suya göre 10 km/saat'lik bir hızla karşıdan karşıya geçmektedir. Nehirdeki su doğuya doğru yere göre 5 km/saat'lik düzgün bir hızla sahiptir. Teknenin kıyılardan birinde duran bir gözlemciye göre hızını bulunuz.

**Çözüm:**



Bu hızlar arasındaki ilişki  $\mathbf{v}_{tY} = \mathbf{v}_{tm} + \mathbf{v}_{nY}$

Bulmak istediğimiz hız teknenin yere göre olan hızı, yani  $v_{tY}$  dir.

$$v_{ty} = \sqrt{(v_{tn})^2 + (v_{ny})^2} = \sqrt{(10 \text{ m/s})^2 + (5 \text{ m/s})^2} = 11,2 \text{ km/saat} \text{ bulunur.}$$

$$v_{ty} \text{ 'nin yönü } \theta = \tan^{-1} \left( \frac{v_{ny}}{v_{tn}} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{5 \text{ km/saat}}{10 \text{ km/saat}} \right) = 26,6^\circ$$