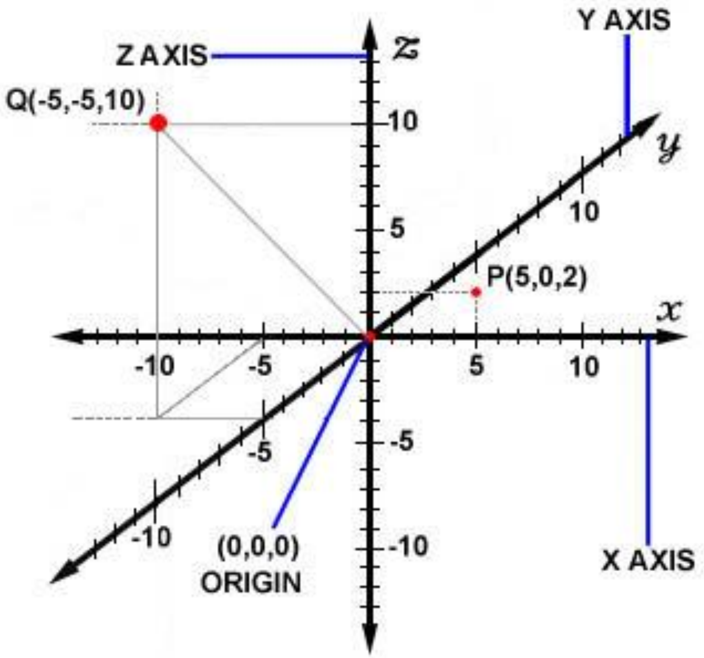
Koordinat Sistemleri ve Dönüşümleri

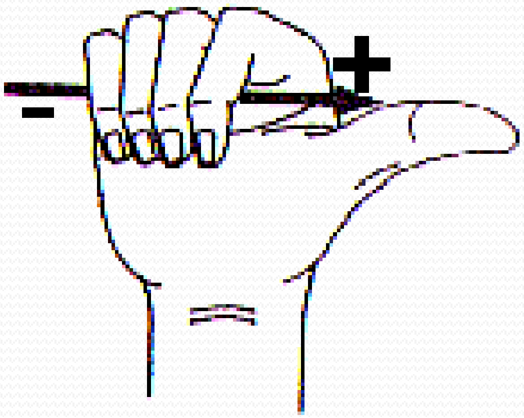
Prof. Dr. Bahadır AKTUĞ

Kartezyen Koordinat Sistemleri

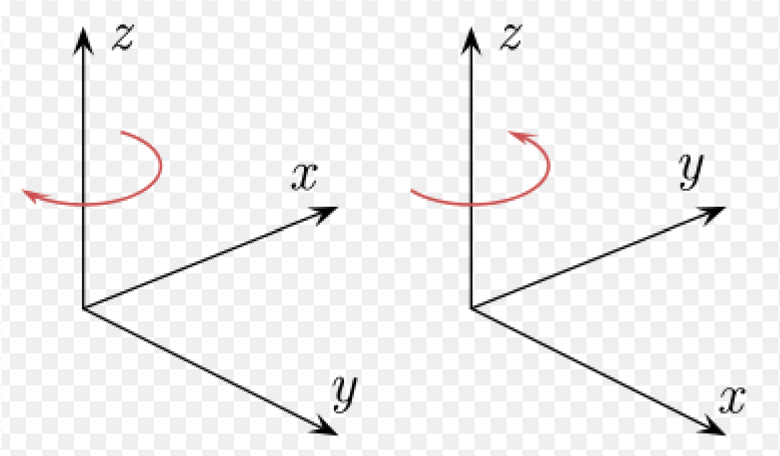


- Kartezyen Koordinatlarda, her bir P noktası üç gerçel sayıdan oluşan bir küme ile ifade edilmektedir.
- P noktasını ifade eden bu sayılar, noktanın dik projeksiyon edildiği eksenlerdeki değerlerdir.
- Koordinatlar sırayla ifade edilir.
- Örneğin, P noktasının koordinatları x, y, z, şeklinde verilmişse, P=(x,y,z) şeklinde yazılabilir. Koordinat sistemi sağ veya sol el kuralına göre ifade edilebilir.
- Koordinatları, x=0, y=0, z=0 şeklinde verilen nokta orijin olarak isimlendirilir ve üç eksenin birbirini kestiği noktadır.

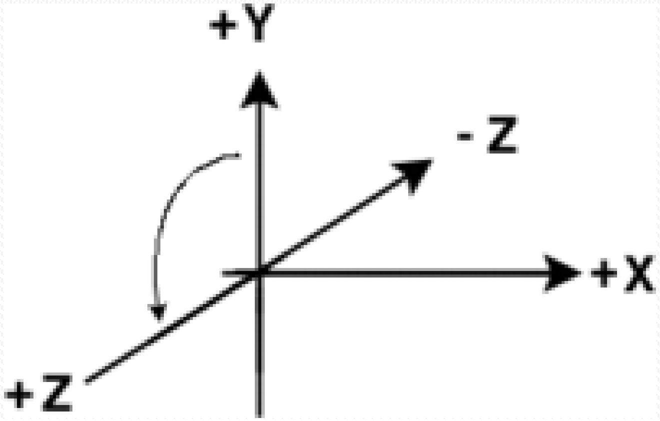
Sağ ve Sol El Koordinat Sistemleri



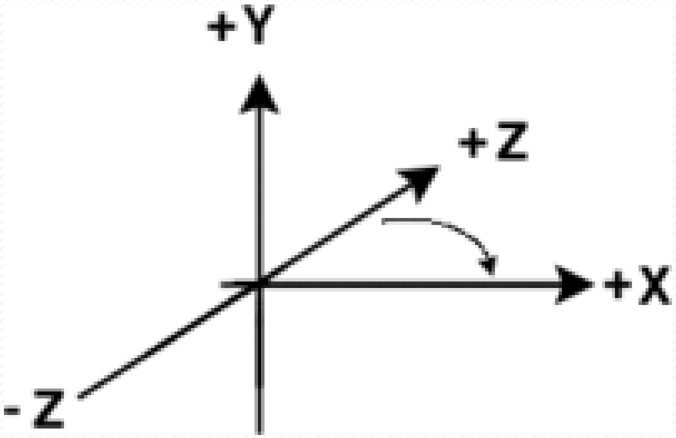
Sağ el kuralı



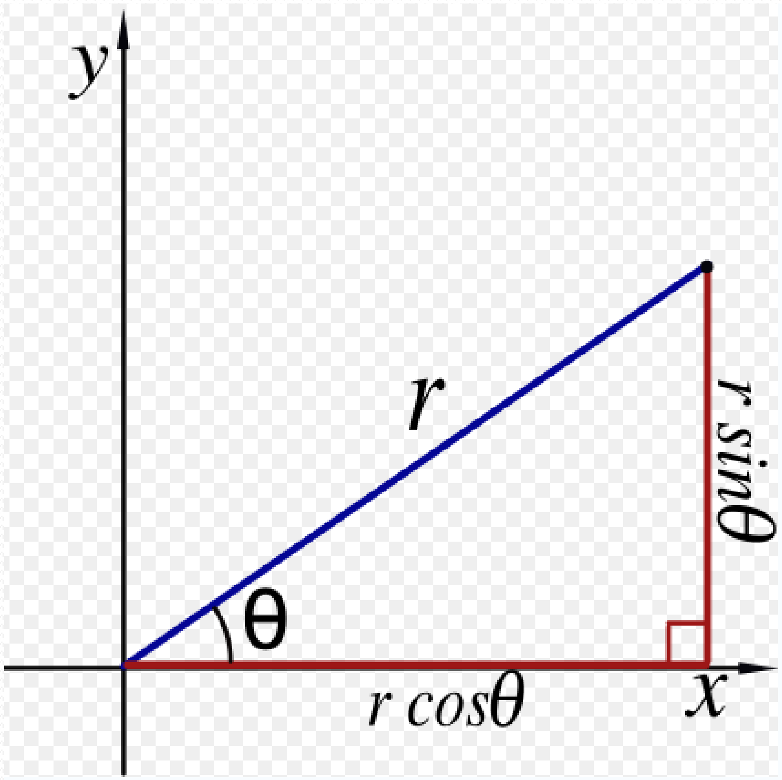
Sağ el koordinat sistemi



Sol el koordinat sistemi



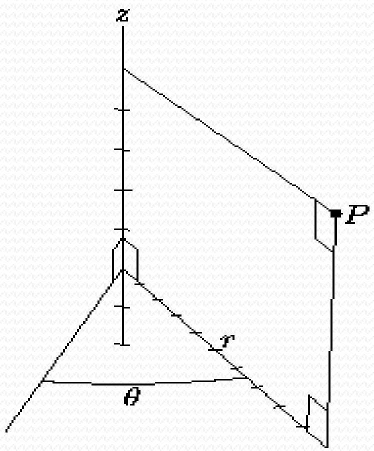
Kutupsal Koordinatlar (iki boyut)



Kutupsal koordinatları tanımlamak için ;

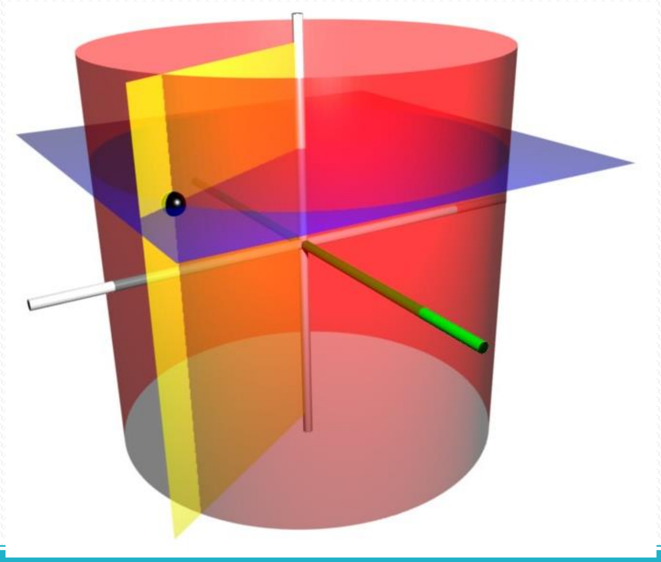
- θ açısının ölçüldüğü kutup eksenine (şekilde X ekseni)
- Orijinden olan uzaklığı belirtmek için de radyan uzaklık parametresine (r) ihtiyaç vardır.
- Yandaki şekilde P noktasının koordinatları, orijinden olan radyal uzaklık (*r*) ve P noktasının ana düzlemle yaptığı açı (θ) ile ifade edilmiştir.

Silindirik Koordinatlar (3 Boyutlu)



Kutupsal koordinatları üç boyutlu ifade etmek için bir parametreye daha ihtiyaç vardır. Bu parametre Z eksinine olan izdüşümü tanımlar.

Bir noktanın üç boyutlu koordinatları bu şekilde;



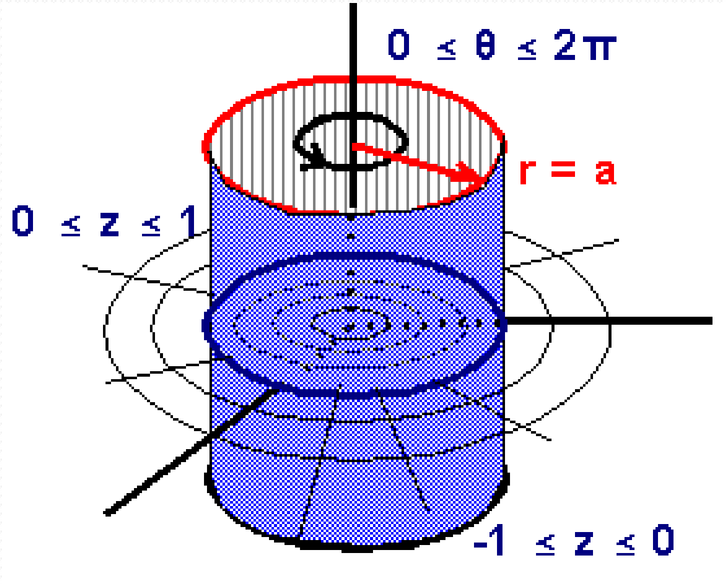
- Ekvatoryal Düzlemde orijinden olan radyal uzaklık (*r*)
- Kutup Ekseni ile olan açı (θ)
- Düşey eksendeki değer (z)

ifade edilebilir.

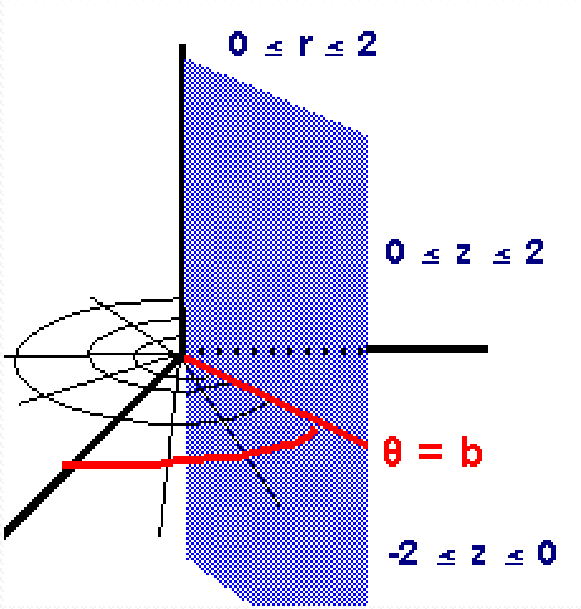
Silindirik Koordinatlar (3 Boyutlu)

Küresel koordinatların z değeri ile kartezyen koordinatların z değeri her nokta için aynıdır. Silindirik koordinatlar ismini r radyal uzaklık parametresi sabit olduğunda oluşan silindirden almıştır. Ayrıca, θ sabit olduğunda ise bir düzlem oluşur.

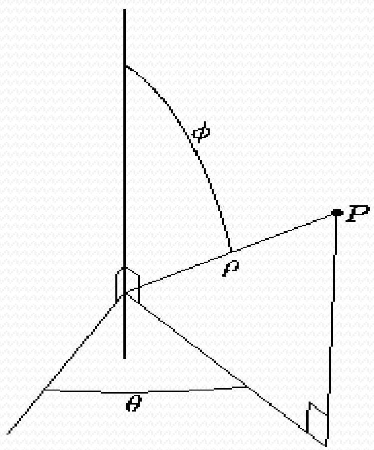
r = a şeklinde sabit olduğunda

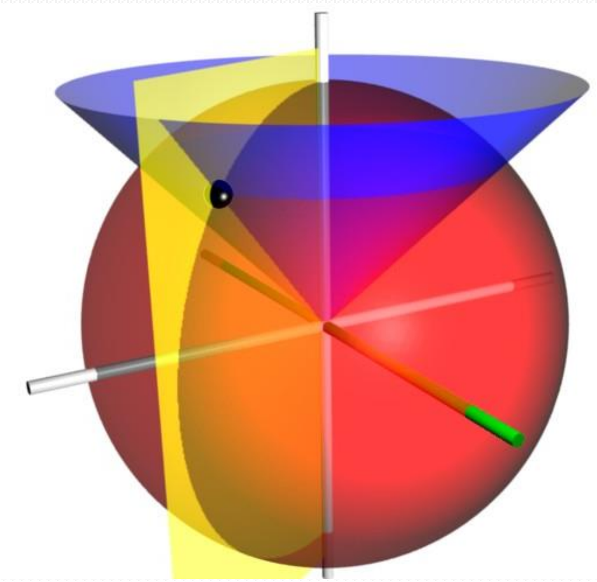


θ = b şeklinde sabit olduğunda



Küresel Koordinatlar





Küresel koordinatları tanımlamak için kutupsal koordinat sistemine benzer şekilde kutup ekseni, eksen ile ekvatoryal düzlemin kesiştiği nokta merkezli dik bir düzlem alınır.

P noktasının koordinatları;

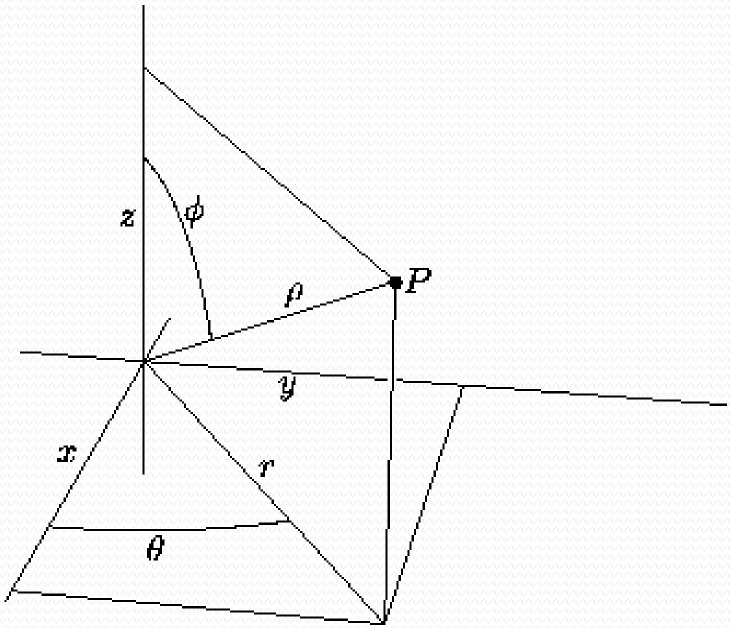
- P noktasından merkeze olan dik uzaklık (ρ),
- Kutup ekseni ile yapılan açı (θ)
- P noktasının düşey düzlemle yaptığı açı (Φ)

Kutup ekseni ile yapılan θ açısına zaman zaman azimut, düşey eksen ile yapılan Φ açısına zenit dendiği de olmaktadır. Ancak, bu kavramlar çok daha özel anlamlara sahip olup, ileriki derslerde açıklanacaktır.

θ açısı genellikle 0 ° - 360° arasında ifade edilir. Ancak, -180°,180° aralığını da kullanmak olanaklıdır.

Bu koordinat sistemindeki açılar size neyi çağrıştırıyor ?

1. Dönüşümler
(Kartezyen ve Silindirik Koordinatlar Arasında)

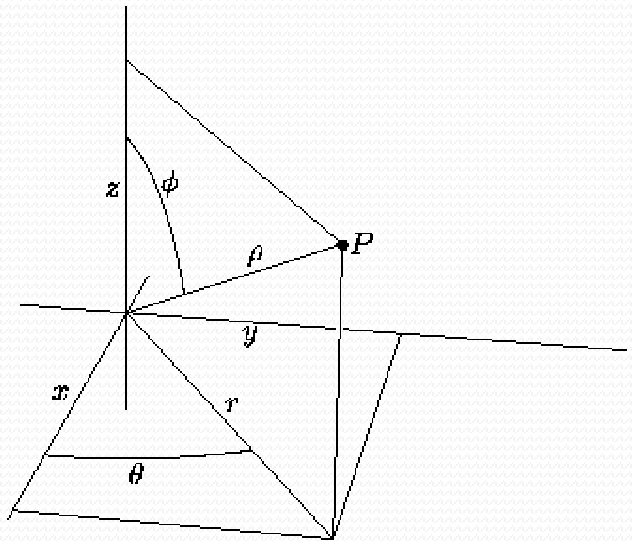


Kartezyen ve Silindirik Koordinatlar arasındaki dönüşüm aşağıdaki eşitliklerle yapılabilir.

- r parametresi ile kartezyen koordinat eksenlerinin birimi aynı olmalıdır.
- Z parametresi her nokta için iki sistemde de aynıdır.
- θ açısının hesaplanmasına 4-bölge tanjant tersi alınması gerektiği unutulmamalıdır.

$$\text{cart} \leftrightarrow \text{cyl} \quad \begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

2.Dönüşümler
(Kartezyen ve Küresel Koordinatlar Arasında)

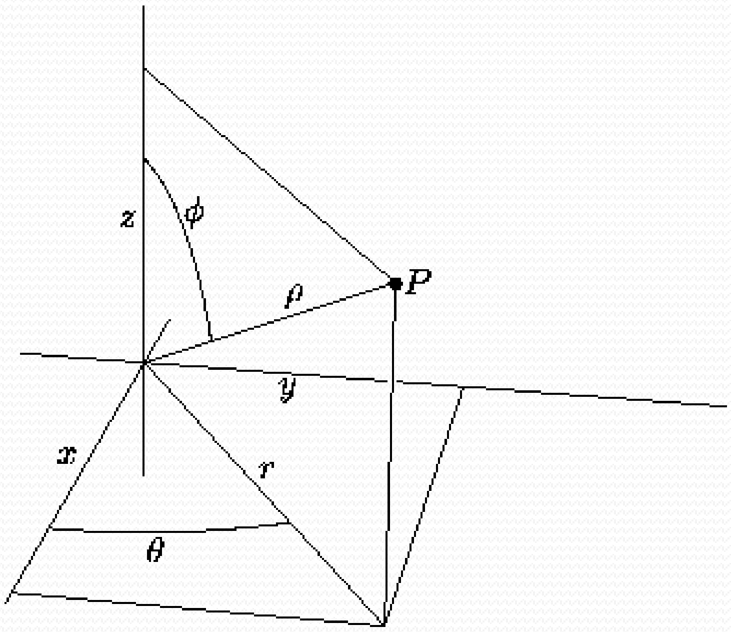


Kartezyen ve Küresel Koordinatlar arasındaki dönüşüm aşağıdaki eşitliklerle yapılabilir.

- Φ açısı 0^0-90^0 arasında değerlere sahiptir.
- ρ parametresi ile kartezyen koordinat eksenlerinin birimi <u>aynı olmalıdır</u>.
- θ açısının hesaplanmasına <u>4-bölge tanjant tersi</u> alınması gerektiği unutulmamalıdır.

$$\text{cart} \leftrightarrow \text{sph} \qquad \begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\phi, \\ y = \rho\sin\theta\sin\phi, \\ z = \rho\cos\phi, \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x}, \\ \phi = \arctan\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \quad = \arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \end{cases}$$

3. Dönüşümler
(Silindirik ile Küresel Koordinatlar Arasında)



Silindirik ile Küresel Koordinatlar arasındaki dönüşüm aşağıdaki eşitliklerle yapılabilir.

- Φ açısı 0^0-90^0 arasında değerlere sahiptir.
- ρ parametresi ile r parametresinin eksenlerinin birimlerine dikkat edilmelidir.
- θ açısı her nokta için iki sistemde de aynıdır.

$$\text{cyl} \leftrightarrow \text{sph} \qquad \begin{cases} r = \rho \sin\phi, \\ z = \rho\cos\phi, \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{r^2+z^2}, \\ \phi = \arctan\dfrac{r}{z}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin\phi = \dfrac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}, \\ \cos\phi = \dfrac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}. \end{cases}$$

Azimut ve Semt

Azimut;

Bir doğrultunun <u>kuzey ile saat istikametinde</u> yaptığı açı şeklinde tanımlanır.

Önceki derste, kuzey tanımları hatırlanırsa, seçilecek kuzeye göre azimutun da farklı isimler alacağı açıktır.

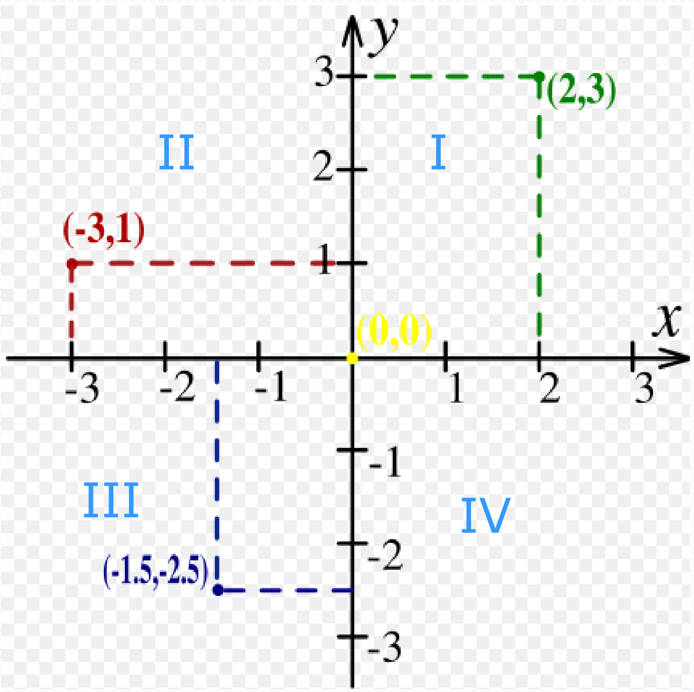
Örneğin, Astronomik kuzeye göre ölçülen azimuta <u>Astronomik Azimut</u>,

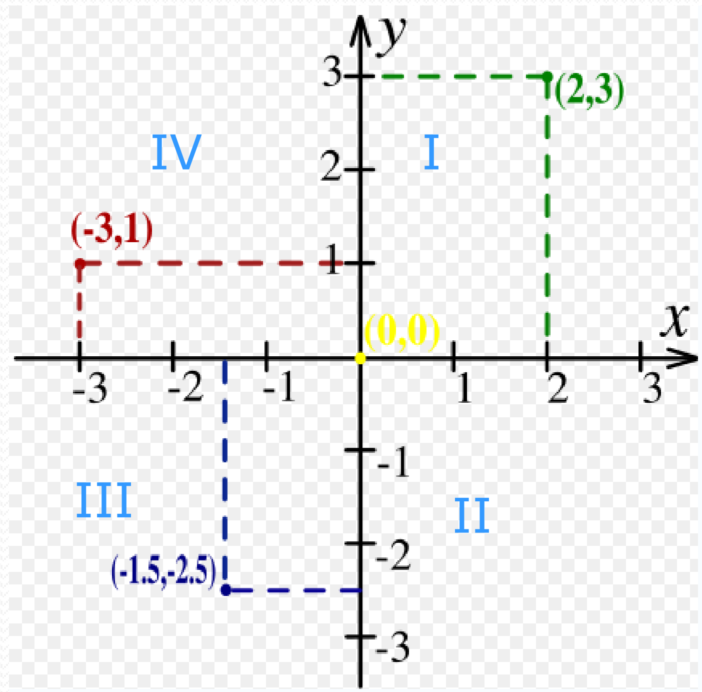
Jeodezik Kuzeye göre ölçülen azimuta da <u>Jeodezik Azimut</u> adı verilir.

Koordinatları düzlemde ifade etmek için gerekli projeksiyonlar verilmişti. Buna göre düzlem koordinatlarına göre elde edilen azimuta da <u>Semt</u> adı verilir.

Yukarıdaki açıklamalara göre azimut hangi aralıkta değer alır?

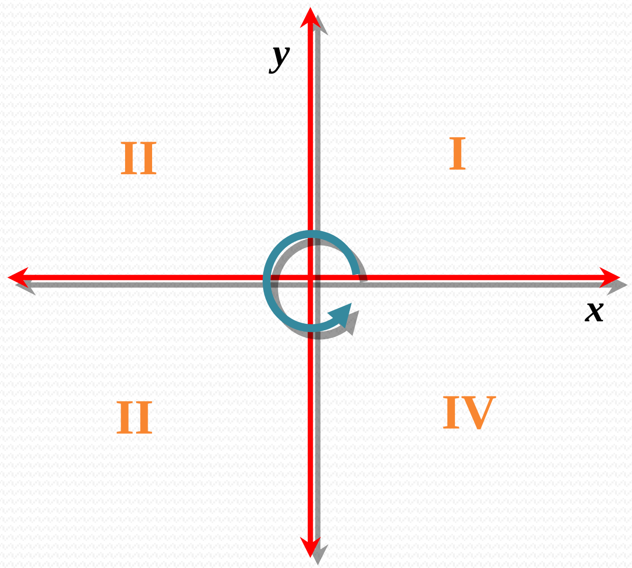
Azimut ve Semt

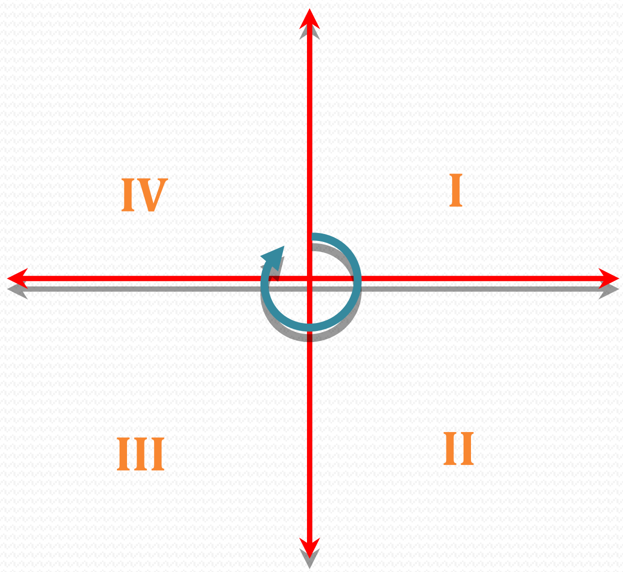




Azimut tanımına göre bölge numaraları nasıl olmalı?

Azimut ve Semt

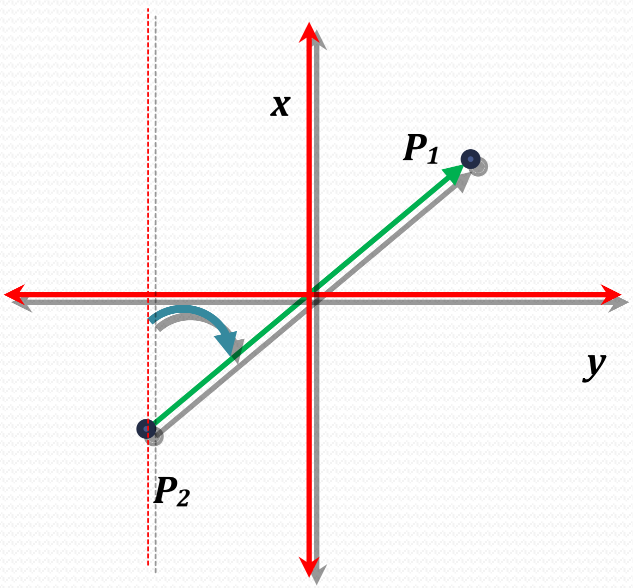


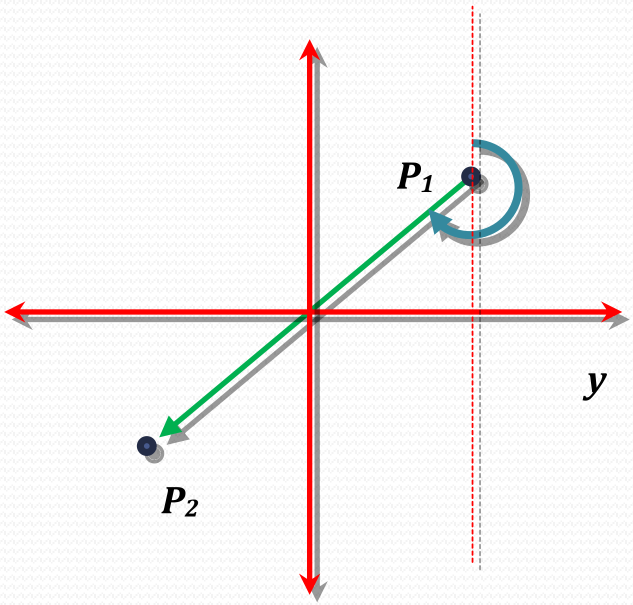


Koordinat eksenleri ve açısal bölgeler. Sol tarafta klasik analitik geometri sağ tarafta ise jeodezik eksen ve bölgeleri gösterilmektedir.

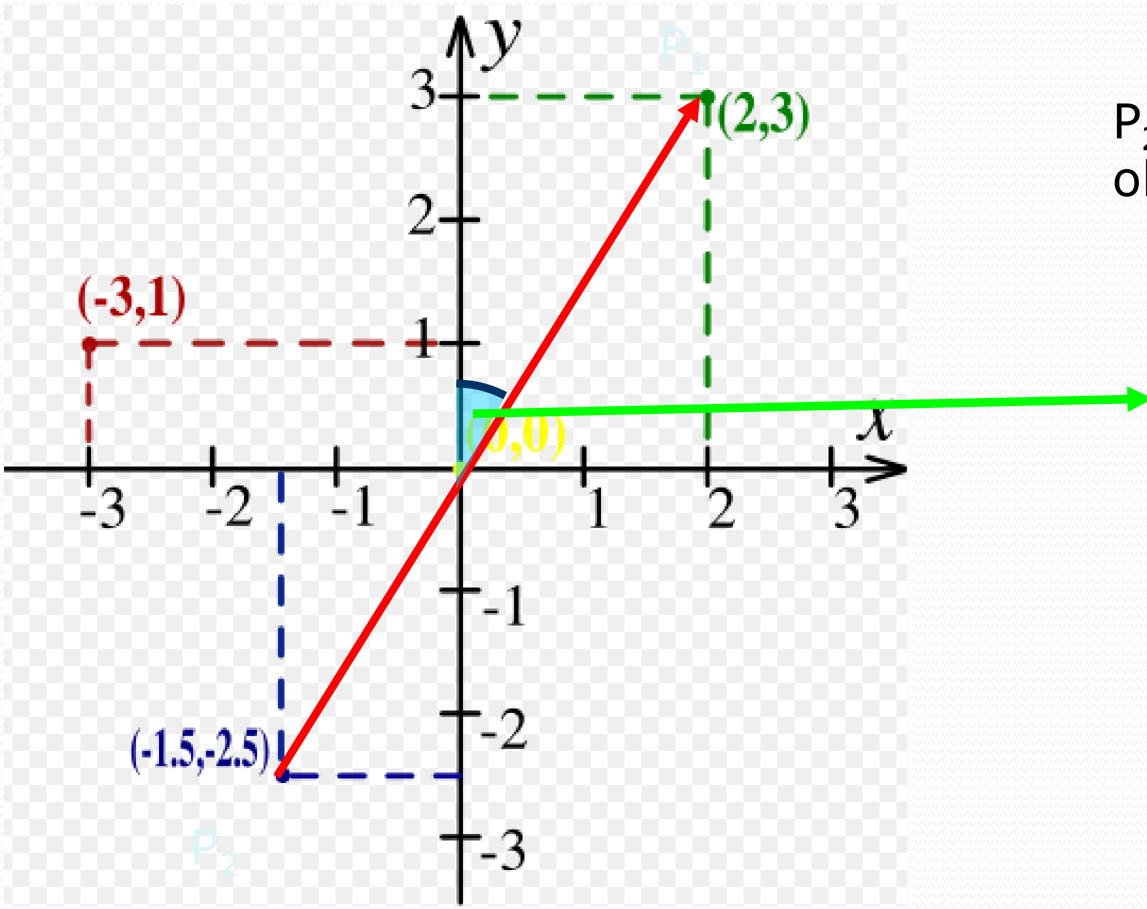
Azimut ve Semt

Yine azimut ve semt tanımlarına göre herhangi P_1 ve P_2 noktaları için P_1'den P_2'ye olan azimut/semt ile P_2'den P_1'e olan azimutlar farklıdır.





Azimut ve Semt

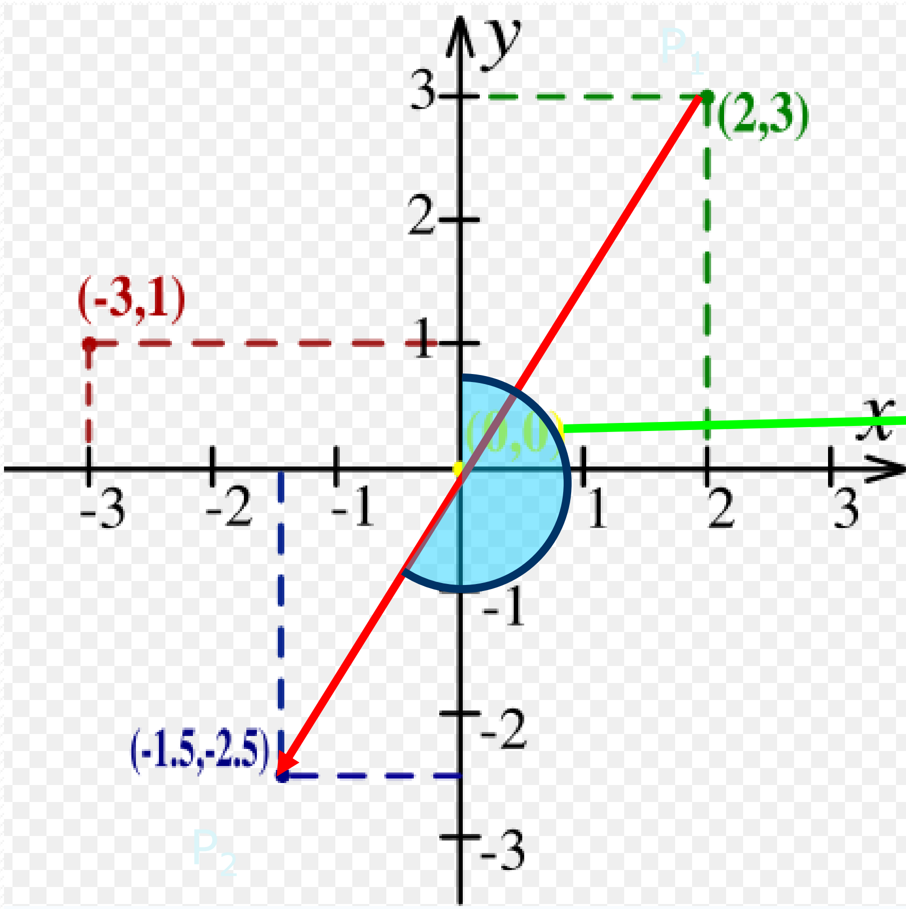


P_2 noktasından P_1 noktasına olan semt:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}\right)$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2-(-1.5)}{3-(-2.5)}\right) \approx 32.5\ \textit{derece}$$

Azimut ve Semt



P_1 noktasından P_2 noktasına olan azimut

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\right)$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{-1.5-2}{-2.5-3}\right) \approx 212.5 \ derece$$

Azimut ve Semt

Örnek:

Silindirik nokta koordinatları

$r=5517447.8475$ m

$\theta=30^{0}$ ve

$h=3185500.0000$ m

şeklinde verilen bir noktanın küresel koordinatlarını (ρ,Φ,θ) bulunuz.

Azimut ve Semt

Çözüm:

Silindirik nokta koordinatları

r=5517447.8475 m

$\theta=30^0$ ve

h=3185500.0000 m

$$x = r\cos\theta = 4778250.0000,\;\; x = \rho\sin\Phi\cos\theta,\; \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 6371000$$

$$y = r\sin\theta = 758723.9237,\; y = \rho\sin\Phi\sin\theta,\;\; \Phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) = 60^0$$

$$z = h = 3185500.0000,\;\; \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = 30^0$$

Azimut ve Semt

Örnek:

Enlemi 39^o

Boylamı 32^o olan bir noktanın;

Silindirik nokta koordinatlarını (r,θ,z) bulunuz.

Dünya küre kabul edilerek, yarıçapı 6371000 **m alınacaktır**.

Azimut ve Semt

Çözüm:

Silindirik nokta koordinatları

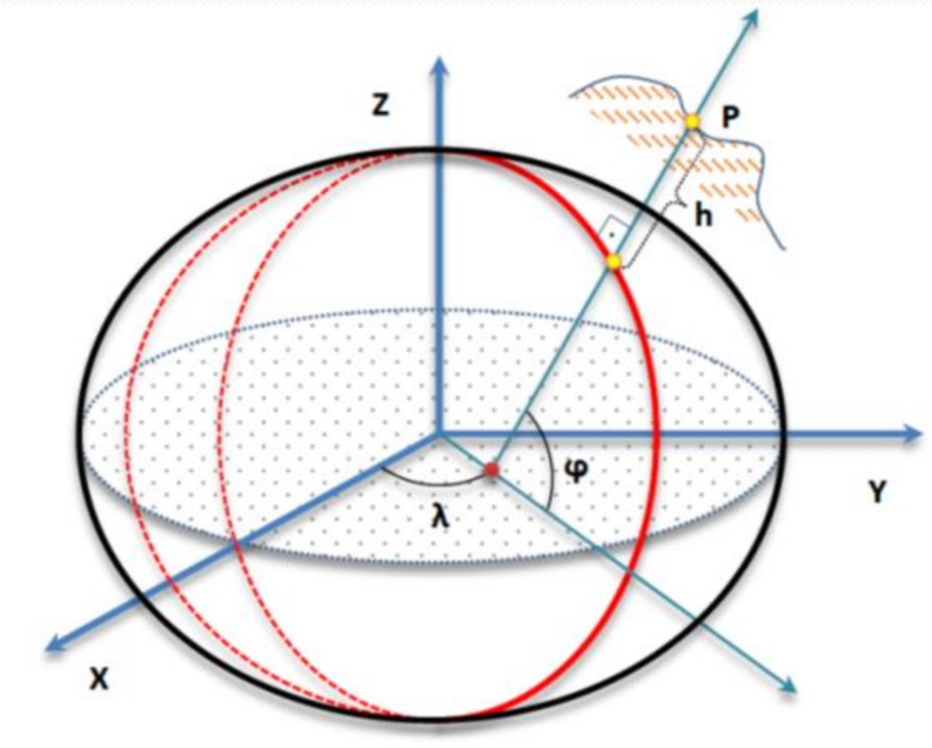
Enlem: 39°
Boylam: 32°
ρ : 6371000 m

$$x = \rho \sin \Phi \cos \theta = 4198853.1220, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} = 4951196.9204$$

$$y = \rho \sin \Phi \sin \theta = 2623734.6291, \qquad y = r \sin \theta,\ y = r \cos \theta = 32$$

$$z = \rho \cos \Phi = 4009400.2113, \qquad h = 4009400.2113$$

Yer Merkezli Kartezyen Koordinatlar



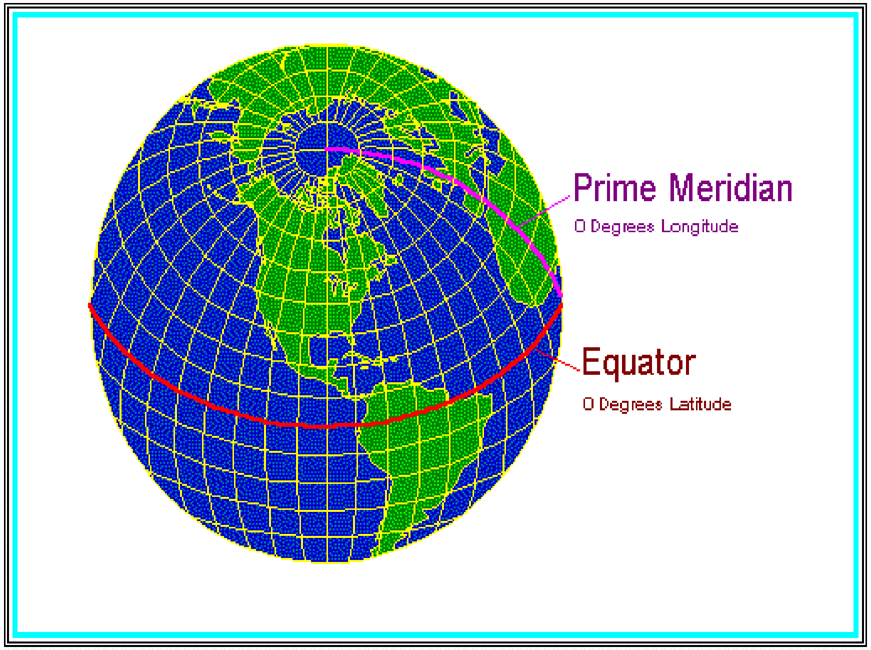
- Bir noktanın coğrafi koordinatlarının sabit kalabilmesi için; koordinat sisteminin de dünya ile birlikte dönmesi gerekir.
- Coğrafi koordinatlar ile kartezyen koordinatları ilişkilendirebilmek amacıyla dünya için Yer-Merkezi, Yer-Sabit Koordinatlar koordinatlar tanımlanmıştır.
- Bu kartezyen koordinat sisteminde;
  - **Orijin** yerin ağırlık merkezi olacak şekilde,
  - **X ekseni** ekvator üzerinde Greenwich'den geçecek şekilde,
  - **Z ekseni** dünyanın ortalama dönme eksenini temsil edecek şekilde,
  - **Y ekseni** ise önceki iki eksene dik olacak şekilde tanımlanmıştır.

Yer Merkezli Kartezyen Koordinatlar

- Dünyayı bir küre kabul edersek, iki parametre ile konumumuzu ifade edebiliriz.
- Ancak, dünyayı küre kabul etmek, birçok uygulama için yeterli bir varsayım değildir.
- Dünya;
  - Geometrik olarak en yakın şekil olan **elipsoid**,
  - Fiziksel olarak **jeoid** ile tanımlanır.
- Elipsoid; bir elipsin küçük ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan 3B şekildir. Dolayısıyla ekvator üzerindeki noktaların merkeze uzaklıkları aynı iken, kutuplara gidildikçe uzaklık kısalır.
- Dünya için kullanılan ve Uluslararası Jeodezi Birliği tarafından da benimsenen GRS-80 elipsoidi;
  - Büyük yarı eksen (a): 6 378 137.00000 m
  - Küçük yarı ekseni (b): 6 356 752.31414 m

olacak şekilde tanımlanmıştır

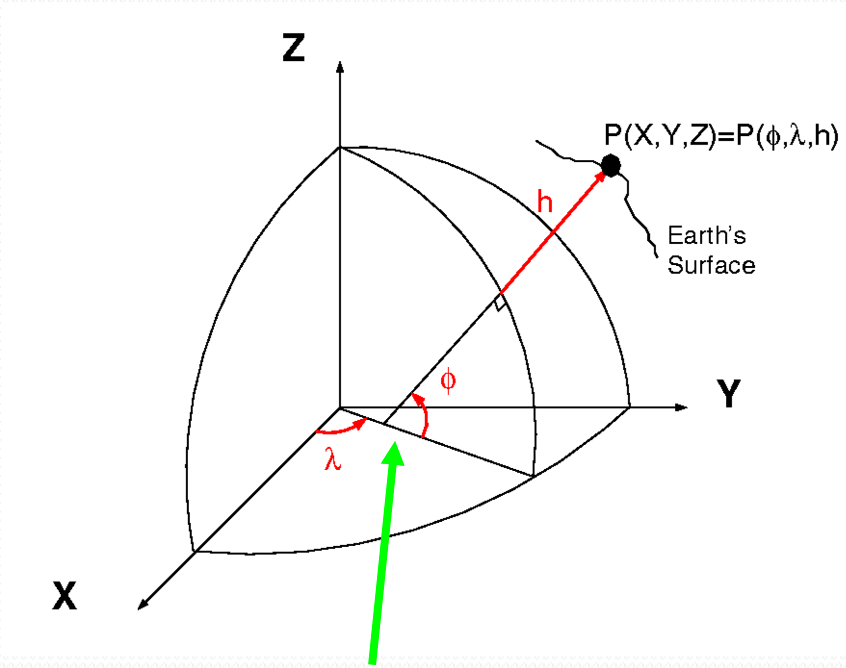
Jeodezik (Coğrafi) Koordinatlar



- 3B koordinatları ifade etmek için 3 parametreli koordinat sistemleri verildi.
- Eğer konumu iki parametre ile ifade etmek istersek, parametrelerden birini sabit almamız gerekir.
- Küresel koordinatlarda, noktaların bir yüzey üzerinde olduğu varsayamı yoktur.

- **Eğer noktaların ρ uzaklıkları sabit alınırsa θ ve Φ açıları ile bir küre tanımlanır. Ancak, enlem(Φ), küresel koordinatlardaki Φ'nın tümleridir.**

Jeodezik (Coğrafi) Koordinatlar



Neden merkezden geçmiyor?

- Coğrafi koordinatlar, bir elipsoid üzerinde tanımlanır. Elipsoid değişirse, coğrafi koordinatlar da değişir.
- Dünyada farklı elipsoidleri kullanan ülkeler bulunmaktadır.
- Ülkemizde geçmişte Hayford elipsoidi kullanılmıştır.
- Şu an Türkiye'de jeodezik koordinatlar GRS-80 üzerinde ifade edilmektedir.
- Şekilde coğrafi koordinat sisteminde herhangi bir noktanın koordinatlarının,
  - Enlem
  - Boylam
  - Yükseklik

şeklinde ifade edilmiştir.

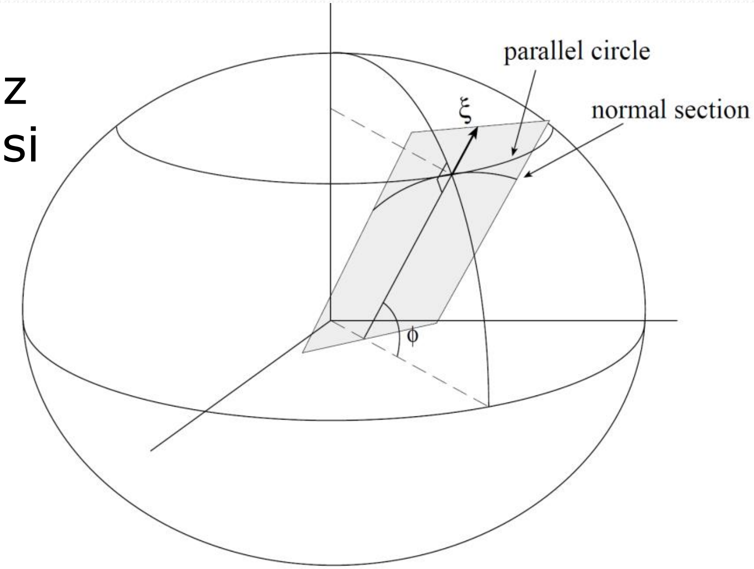
Jeodezik Koordinat sisteminde, yükseklik, elipsoit yüzeyi üzerinden itibaren elipsoit yüzey normali boyunca ölçülen yükseklik olarak alınır ve elipsoit yüksekliği (h) olarak isimlendirilir.

Jeodezik (Coğrafi) Koordinatlar

- Birçok çalışmada en yaygın olarak karşılaşılan koordinat sistemidir. Bu sistemde herhangi bir P noktasının koordinatları, noktanın bulunduğu paralel dairesinin ekvator düzlemi ile yaptığı açı (enlem) ve noktanın bulunduğu meridyenin düzleminin başlangıç meridyeni (Greenwich) ile saatin tersi istikametinde (kuzey kutbundan bakıldığında) ve ekvator düzlemi üzerinde yaptığı açı (boylam) ile ifade edilir.
- Kürenin aksine, elipsoid üzerindeki bir noktaların yüzey normalleri basıklık nedeniyle elipsoidin merkezinde birleşmezler.
- Geleneksel olarak enlem boylam φ veya ϕ ile boylam ise λ veya Λ sembolleriyle gösterilir.
- Tanım olarak, boylamları eşit noktaların oluşturduğu yay meridyen dairesi, enlemleri aynı noktaların oluşturduğu daire ise paralel dairesidir.

Eğrilik ve Jeodezik Eğri

- Eğrilik kavramının anlaşılması için normal düzlem, normal kesit eğrisi ve ana normal kesit eğrilerinin tanımlanmasına ihtiyaç vardır.
- Bir yüzey üzerindeki herhangi bir noktadaki yüzey normalini içeren düzleme normal düzlem adı verilir. Normal düzlemin yüzey ile arakesiti sonucu oluşan eğri normal kesit eğrisi olarak tanımlanır.
- Herhangi bir noktada farklı yönlerde sonsuz sayıda normal düzlem ve normal kesit eğrisi oluşturulabilir. Ancak, bu normal kesit eğrileri içinde eğriliği maksimum ve minumum olan, diğer bir deyimle eğrilik yarıçapı minimum ve maksimum olan iki özel normal kesit eğrisi vardır.
- Bu normal kesit eğrilerine ana (principal) normal kesit eğrileri adı verilir.



Eğrilik ve Jeodezik Eğri

- Küre yüzeyi üzerinde tanımlanan tüm yüzey normalleri (kürenin merkezinden geçen düzlem ile kürenin arakesiti olan büyük daire yayları) kürenin merkezinde kesişirler. Bu nedenle, küre üzerindeki herhangi iki nokta küre merkezini de içeren tek bir normal kesit eğrisi ile birleştirilebilir ve aralarındaki en kısa mesafe bu kesit eğrisi ile tanımlanabilir.
- Buna karşın, elipsoit yüzeyindeki yüzey normalleri aykırı doğrular oluştururlar ve elipsoit yüzeyi üzerinde herhangi iki noktayı birleştiren iki ayrı normal kesit eğrisi tanımlanabilir. Bu nedenle, elipsoid üzerindeki herhangi iki nokta arasındaki mesafe tek bir normal kesit eğrisi ile tek anlamlı olarak bulunamaz.
- Benzer şekilde, koordinat sistemi tanımlamaları için de tek anlamlı mesafe ölçütüne ihtiyaç vardır.

Eğrilik ve Jeodezik Eğri

- Bir yüzey üzerindeki iki noktayı birleştiren sonsuz sayıda yol bulunabilir. Ama, iki nokta arasındaki mesafenin tek anlamlı olarak tanımlanmasına ihtiyaç vardır.
- Elipsoit üzerinde herhangi iki nokta arasındaki en kısa yol için jeodezik eğri tanımlanmıştır.
- Jeodezik eğri, elipsoid üzerinde tek anlamlı olarak iki nokta arasındaki mesafeyi tanımlamayı sağlamaktadır.
- Jeodezik eğri, herhangi iki noktayı birleştirirken her noktasındaki normali, elipsoid yüzey normali ile çakışmaktadır.
- Başka bir tanım olarak da jeodezik eğriliği sıfır olan eğridir.
- Küre üzerindeki herhangi iki nokta arasındaki en kısa mesafeyi tanımlayan normal kesit eğrileri de birer jeodezik eğri kabul edilebilir.

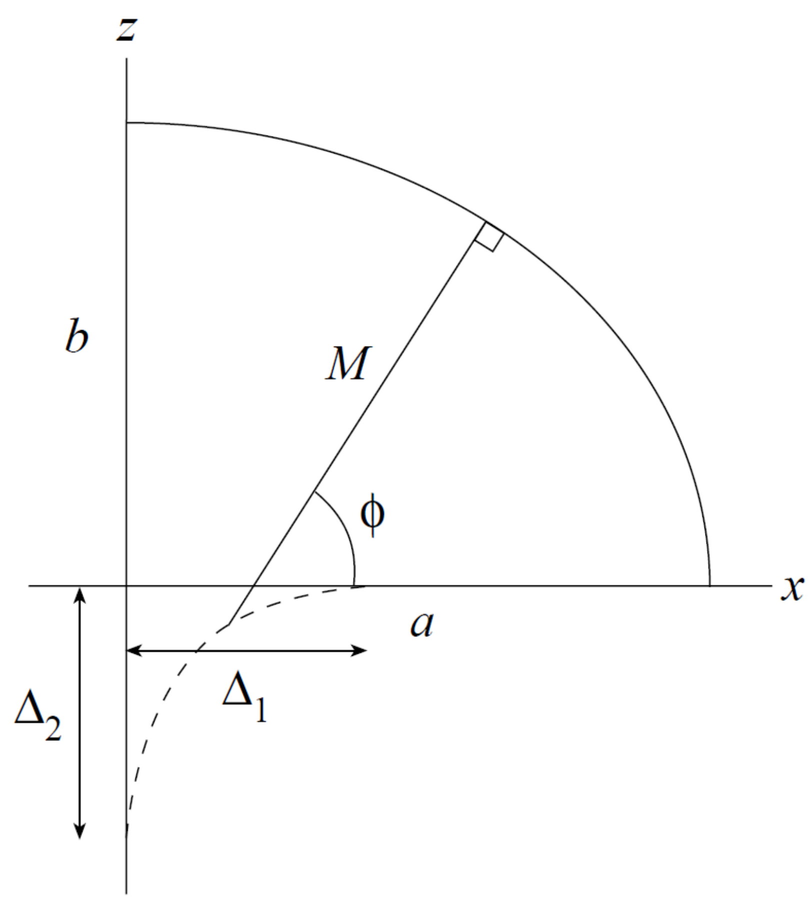
Bu tanımlara göre;

Meridyenler, paralel daireleri, ekvator dairesi birer jeodezik eğri midir? (İpucu: jeodezik eğriyi en kısa yol olarak düşünün).

Ana Normal Kesit Eğrilikleri

Elipsoit yüzeyindeki ana normal kesit eğrilerinden eğriliği maksimum olan meridyen boyunca olandır ve ana eğrilik yarıçapı;

$$M = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$



şeklinde tanımlanır. Buna göre maksimum eğrilik (küçük ana eğrilik yarıçapı);

$$K_1 = \frac{1}{M}$$

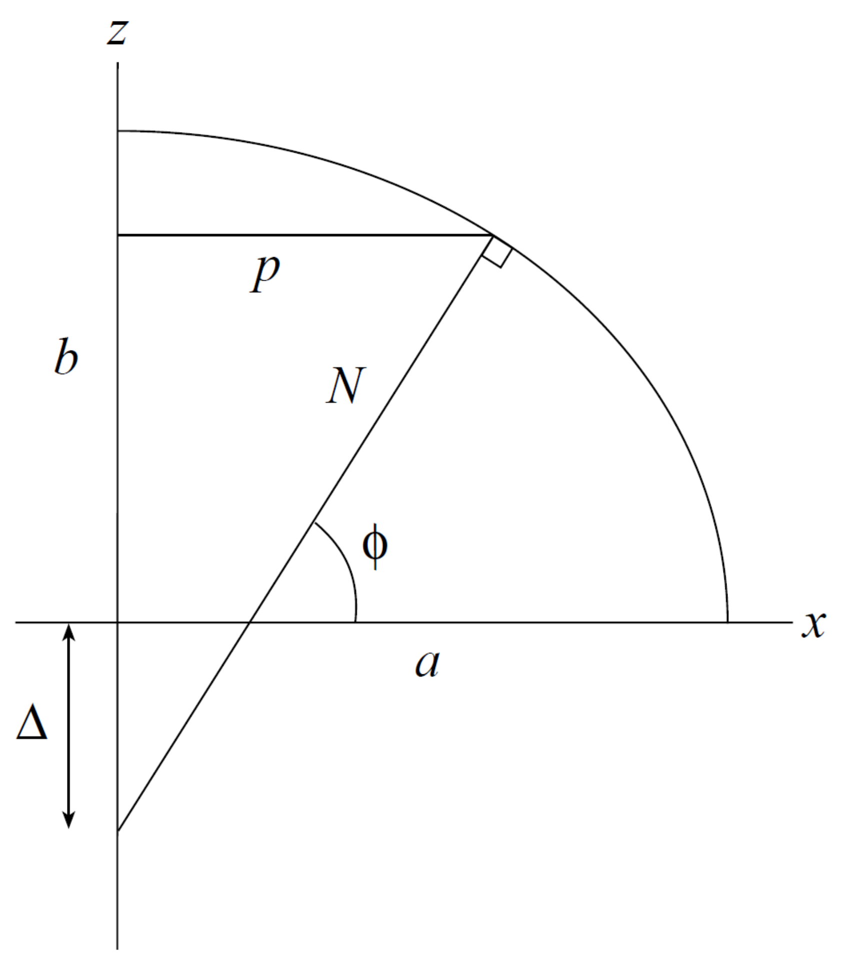
Ana Normal Kesit Eğrilikleri

Eğriliği minimum, eğrilik yarıçapı maksimum olan ana normal kesit eğrisinin yarıçapı ise;

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

şeklinde hesaplanır ve bu eğrilik yarıçapına ait minimum eğrilik ise;

$$K_2 = \frac{1}{N}$$



Jeodezik Koordinat Sistemi İle Kartezyen Koordinat Sistemi Arasındaki Dönüşüm

Jeodezik koordinatlardan Kartezyen koordinatlara dönüşüm;

$$x = (N + h)\cos\varphi\cos\lambda$$
$$y = (N + h)\cos\varphi\sin\lambda$$
$$z = (N(1 - e^2) + h)\sin\varphi$$

- N ana eğrilik yarıçapı, h, elipsoid yüksekliği, e birinci merkezdışılık (first eccentricity).
- Elipsoid x ve y yönünde simetriktir. Basıklık z yönündedir. Yukarıdaki eşitlikte, z ekseni üzerindeki basıklık etkisi açıkça görülebilmektedir.

Jeodezik Koordinat Sistemi İle Kartezyen Koordinat Sistemi Arasındaki Dönüşüm

Kartezyen Koordinatlardan Jeodezik Koordinatlara Dönüşüm;

Bu dönüşüm için birçok kapalı ve iteratif teknik geliştirilmiştir. Basitliği nedeniyle, iteratif çözüm verilecektir. Boylam;

$$\lambda = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$$

şeklinde bulunur. Buna karşın φ ve h değerlerini iterasyon ile hesaplamak gerekir. h << N olup , ilk aşama için h = 0 alınırsa, enlem değeri;

$$\varphi = \tan^{-1}(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}(1 - \frac{(2-f)f\,N}{N+h})^{-1})$$

şeklinde bulunur. Bulunan enlem değeri yerine konarak elipsoit yüksekliği;

$$h = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos\varphi} - N$$

şeklinde hesaplanır. Hesaplanan h değeri tekrar yerine konarak enlem ve yükseklik değerleri güncellenir.