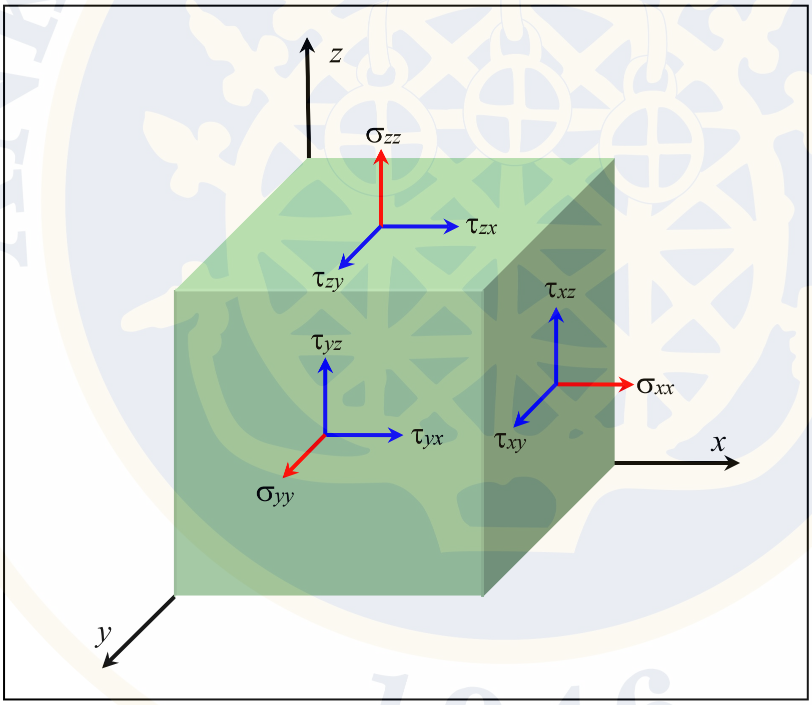
3. ELASTİK DALGA DENKLEMİ

Yer içerisinde yayılan elastik dalgalar, geçtikleri ortamın deformasyonuna neden olurlar. Bir cisimdeki veya ortamdaki deformasyonlar ise gerilme ve yamulma ilişkileri ile açıklanabilmektedir. Bir cisim içerisindeki birim hacim elemanına etki eden gerilmelerin, buna karşılık meydana gelen yamulmaların ve yer değiştirmelerin statik bir dengede olduğu ve zamanla değişmediği düşünülür. Ancak sismik dalga yayılımı, hız ve ivme kavramlarını içeren zaman bağımlı bir olay olduğu için, sürekli ortam içerisindeki hareket etkisinin de hesaba katılması gerekmektedir.

Elastik dalga yayılım bağıntılarını incelerken, ortamın yön bağımsız (izotrop), tek düze (homojen), esnek ve sonsuz bir ortam olduğu varsayılır. Esnek bir cisim içerisindeki *dxdydz* boyutlarında çok küçük bir kübik hacim elemanı üzerindeki kuvvetlerin dengesini inceleyelim (Şekil 3.1). Hacim elemanının dengede kalabilmesi için *x, y, z* eksenleri doğrultusundaki kuvvetlerin toplamının sıfır olması gerekir. Hacim elemanın her yüzüne biri normal (σ) ve diğer ikisi teğetsel (τ) olmak üzere üç gerilme bileşenin etkili olduğu bir önceki bölümde anlatılmıştı (Şekil 3.1).



Şekil 3.1 Birim hacim elemanı üzerine etkiyen gerilme bileşenleri.

Kuvvetlerin *x, y, z* eksen doğrultuları boyunca toplamları şöyledir;

$$\begin{aligned}
x &\rightarrow \left(\sigma_{xx}-\sigma_{-xx}\right)dydz+\left(\tau_{yx}-\tau_{-yx}\right)dxdz+\left(\tau_{zx}-\tau_{-zx}\right)dxdy=0\\
y &\rightarrow \left(\sigma_{yy}-\sigma_{-yy}\right)dxdz+\left(\tau_{xy}-\tau_{-xy}\right)dydz+\left(\tau_{zy}-\tau_{-zy}\right)dydx=0\\
z &\rightarrow \left(\sigma_{zz}-\sigma_{-zz}\right)dxdy+\left(\tau_{xz}-\tau_{-xz}\right)dzdy+\left(\tau_{yz}-\tau_{-yz}\right)dzdx=0
\end{aligned} \tag{1}$$

Yukarıdaki denklemler *dxdydz* hacmi ile bölünürse ve hacim elamanı sonsuz küçük hale getirilirse, bu denklem grubu şu şekli alır;

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\
&\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \\
&\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0
\end{aligned} \tag{2}$$

Gerilme kuvvetlerden başka kübik hacme uygulanan diğer bir kuvvet de malzemenin hacmi ile orantılı olan cisim kuvvetidir. Bu kuvvet,

$$F_i^{cisim} = f_i\, dxdydz \tag{3}$$

ile verilmektedir. Sonsuz küçük birim kübik hacmin kütlesi ise şu şekilde verilmektedir.

$$m = \rho\, dxdydz \tag{4}$$

Burada ρ malzemenin yoğunluğunu göstermektedir. Birim hacim elemanının ivmesi ise, yer değiştirme vektörünün zamana göre ikinci türevi ile verilmektedir. Newton'un İkinci Yasası yani hareket ilkesine göre yukarıdaki bağıntılar kullanılarak,

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \partial_j \tau_{ij} + f_i \tag{5}$$

şeklinde genel anlamda *hareket denklemi'*ni yazmak mümkündür. Eşitliğin sol tarafındaki terimler ortamdaki gerilme gradyentleri ve cisim kuvvetleriyle ilişkili yoğunluk ağırlıklı ivmeyi göstermektedir. Bu eşitlik, sismolojinin esasını oluşturan en temel bağıntıdır. Genellikle cisim kuvveti f , çekim (gravite) kuvveti (f_g) ve kaynak (f_s) ile ilgili terimleri içerir. Cisim kuvvetlerinin olmadığı durumda, *tekdüze dalga denklemi* elde edilir.

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \partial_j \tau_{ij} \tag{6}$$

Bu eşitliği çözebilmek için, yer değiştirmeler (**u**) anlamında gerilmelerin (τ) bir ifadesi olarak gerilme-yamulma ilişkisine ihtiyaç vardır. Gerilme ve yamulma arasındaki doğrusal, yön bağımsız ve tekdüze ilişki,

$$\tau_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \tag{7}$$

şeklinde verilmekteydi. Burada λ ve μ Lame sabitleridir. Gerilme tensörü ε_{ij} ise şu şekilde tanımlanmaktadır.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \tag{8}$$

Gerilme tensörünü, eşitlik (7) içerisine yerleştirirsek,

$$\tau_{ij} = \lambda\delta_{ij}\partial_k u_k + \mu\left(\partial_i u_j + \partial_j u_i\right) \tag{9}$$

(6) ve (9) eşitlikleri ile yer değiştirme ve gerilme için bir çift denklem takımı elde edilmiş olur. Son elde edilen (9) eşitliği (6) bağıntısında yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \partial_j\left[\lambda\delta_{ij}\partial_k u_k + \mu\left(\partial_i u_j + \partial_j u_i\right)\right] \\ &= \partial_i\lambda\partial_k u_k + \lambda\partial_i\partial_k u_k + \partial_j\mu\left(\partial_i u_j + \partial_j u_i\right) + \mu\partial_j\partial_i u_j + \mu\partial_j\partial_j u_i \\ &= \partial_i\lambda\partial_k u_k + \partial_j\mu\left(\partial_i u_j + \partial_j u_i\right) + \lambda\partial_i\partial_k u_k + \mu\partial_i\partial_j u_j + \mu\partial_j\partial_j u_i\end{aligned} \tag{10}$$

elde edilir. Yer değiştirmenin zamana göre türevini $\ddot{\mathbf{u}} = \partial^2\boldsymbol{u}/\partial t^2$ ile gösterirsek ve 10 eşitliğini vektör (dizey) ifadesi ile yazarsak,

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = \nabla\lambda(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \nabla\mu\cdot\left[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T\right] + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} + \mu\nabla^2\mathbf{u} \tag{11}$$

Vektörel tanımlamaları kullanarak,

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{u} = \nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \nabla^2\mathbf{u} \tag{12}$$

ve daha uygun bir şekilde yazılarak aşağıdaki (13) bağıntısını buluruz.

$$\nabla^2\mathbf{u} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) - (\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}) \tag{13}$$

Bu bağıntıyı (11) denkleminde yerine yazarsak

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = \nabla\lambda(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \nabla\mu\cdot\left[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T\right] + (\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \mu\nabla\times\nabla\times\mathbf{u} \tag{14}$$

Bu eşitlik, *sismik/elastik dalga denklemi*'nin bir şeklidir. Eşitliğin sağ tarafındaki ilk iki terim Lame parametrelerinin gradyentlerini içermektedir ve her zaman tekdüze olmayan malzeme için sıfırdan farklı değerlere sahiptir. Tekdüze bir ortam için λ ve μ parametrelerinin sabit olduğunu varsayarsak, uzamsal ortamda değerleri değişmeyeceğinden, $\nabla\lambda$ ve $\nabla\mu$ sıfıra eşit olacaktır. Böylece tekdüze bir ortam için hareket denklemi

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = (\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \mu\nabla\times\nabla\times\mathbf{u} \tag{15}$$

bağıntısı ile verilir. Bu yaklaşım çoğu kuramsal yöntemlerde kullanılmaktadır. Elde edilen bu son bağıntıyı diverjans ve rotasyonel alarak P ve S dalgaları için ikiye ayırabiliriz. (15) eşitliğinin diverjansını alırsak ($\nabla\cdot(\nabla\times\Psi) = 0$ şeklindeki vektörel tanımlamayı yaparak)

$$\frac{\partial^2\nabla\cdot u}{\partial t^2} = \left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)\nabla^2(\nabla\cdot u) \tag{16}$$

elde edilir. Bu, genel olarak α yayılma hızı olarak kabul edilirse

$$\nabla^2(\nabla\cdot\mathbf{u})-\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2(\nabla\cdot\mathbf{u})}{\partial t^2}=0 \tag{17}$$

şeklinde bir dalga denklemini göstermektir. $\nabla\cdot\mathbf{u}$ hacim değişikliğine karşılık geldiği için, (17) eşitliği hacim değişikliğine neden olan ve

$$\alpha=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \tag{18}$$

hızı ile yayılan P-dalgasının (dilatasyon dalgası) hareket denklemidir.

Aynı şekilde, $\nabla\times(\nabla\phi) = 0$ vektörel tanımlamasını kullanarak bu sefer (15) eşitliğinin rotasyoneli alınırsa,

$$\frac{\partial^2(\nabla\times\mathbf{u})}{\partial t^2}=-\frac{\mu}{\rho}\nabla\times\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}) \tag{19}$$

bağıntısı elde edilir. (12) bağıntısındaki vektörel tanımlama ve $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{u}) = 0$ kullanılarak,

$$\frac{\partial^2(\nabla\times\mathbf{u})}{\partial t^2}=\frac{\mu}{\rho}\nabla^2(\nabla\times\mathbf{u}) \tag{20}$$

elde edilir. β yayılma hızı olarak kabul edilirse

$$\nabla^2(\nabla\times\mathbf{u})-\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2(\nabla\times\mathbf{u})}{\partial t^2}=0 \tag{21}$$

şeklinde bir dalga denklemini göstermektir. $\nabla\times\mathbf{u}$ dönme hareketine karşılık geldiği için, (21) eşitliği dönme hareketine diğer bir deyişle şekil değişikliğine neden olan ve

$$\beta=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{22}$$

hızı ile yayılan S-dalgasının (distorsiyon dalgası) hareket denklemidir.

(18) ve (22) bağıntılarını, (15) eşitliği ile verilen elastik dalga denkleminde yerine yazarsak, doğrudan P- ve S- dalgası hızları anlamında yeniden dalga denklemini tanımlamış oluruz.

$$\rho\ddot{\mathbf{u}}=\alpha^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-\beta^2\nabla\times\nabla\times\mathbf{u} \tag{23}$$

3.1 Elastik Dalga Denkleminin Çözümü

Dalga denkleminin çözüm şekli, kullanılan koordinat sistemine bağlıdır. Kartezyen koordinatlardaki (x, y, z) bir tek dalga frekansı (ω) için çözüm,

$$u(x,t) = Ae^{i\left[k\left(xv_x + yv_y + zv_z\right) - \varpi t\right]} \tag{24}$$

şeklinde yazılır. Bu, dalga cephesine dik, birim vektör v'nin doğrultusunda, $c = \varpi / k$ faz hızı ile yayılan bir *düzlem dalgadır*. Birçok dalga yayılım problemi eksensel simetriye sahiptir. Bu özellikten dolayı, bu tür problemler silindirik koordinatlarda (r, θ, z, t) daha kolay çözülebilmektedir. Bu durumda genel çözüm, Bessel fonksiyonları ile ifade edilir. Uzak mesafaler ve θ' ya karşılık gelen simetriden dolayı, Bessel fonksiyonu aşağıdaki gibi asimtotik bir şekilde tanımlanabilir.

$$u(r,z,t) = A_n \left(\frac{2}{\pi k_r r} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\left[i\left(k_r r + k_z z - \varpi t - \frac{\pi}{4} \right) \right]} \tag{25}$$

Bu durumda dalga cephesi genliği, genişlemeden (geometrik yayılma) dolayı $r^{1/2}$ ile orantılı olarak azalacaktır.

Küresel simetriye sahip problemler ise küresel koordinatlarda (r, θ, ϕ, t) daha kolay çözülürler. Genel denklemler, Bessel ve Legendre fonksiyonları ile tanımlanır. Uzak mesafeler ve ϕ'deki simetriden dolayı, Bessel fonksiyonun asimtotik yazılımı şöyle olacaktır:

$$u(r,\theta,t) = A_n \frac{1}{r} \left(\frac{2}{k\pi} \right)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos\theta) e^{\left[i\left(kr - \varpi t - \frac{n+1}{2}\pi \right) \right]} \tag{26}$$

Bu bağıntıdan da görüleceği üzere, küresel dalgalar $1/r$ gibi bir geometrik yayılma oranına sahiptir.

3.1.1 Düzlem Dalgalar

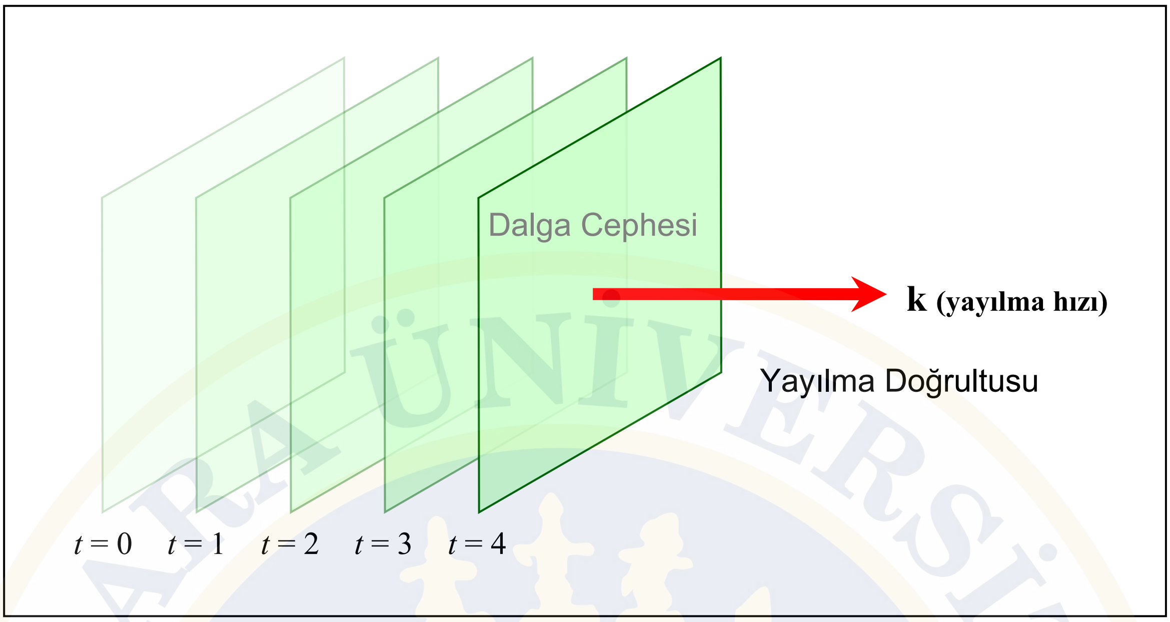
Sadece yayılma doğrultusu boyunca yer değiştirmelere sahip olan dalgalara *düzlem dalgalar* denir (Şekil 2). Örneğin x ekseni boyunca yayılan ve tek bir dalga frekansına sahip düzlem dalga için dalga denklemi çözümü,

$$u(x,t) = Ae^{i(wt \pm \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \tag{27}$$

şeklinde verilir. Uzayda ($\omega t \pm$ k.x) değeri eşit olan noktaların oluşturduğu geometrik yüzeye *dalga cephesi* olarak adlandırılır. En basit dalga cephesi geometrisi, kartezyen koordinatlardaki bir düzlem dalgadır ve

$$W(u) = v_x x + v_y y + v_z z \tag{28}$$

şeklinde gösterilir. Burada v, düzlem dalga cephesine dik doğrultunun kosinüsüdür ve dalga yayılımının doğrultusu olarak tanımlanır.



Şekil 3.2 Düzlem dalga

Tablo 3.1 Dalga parametreleri arasındaki ilişkiler.

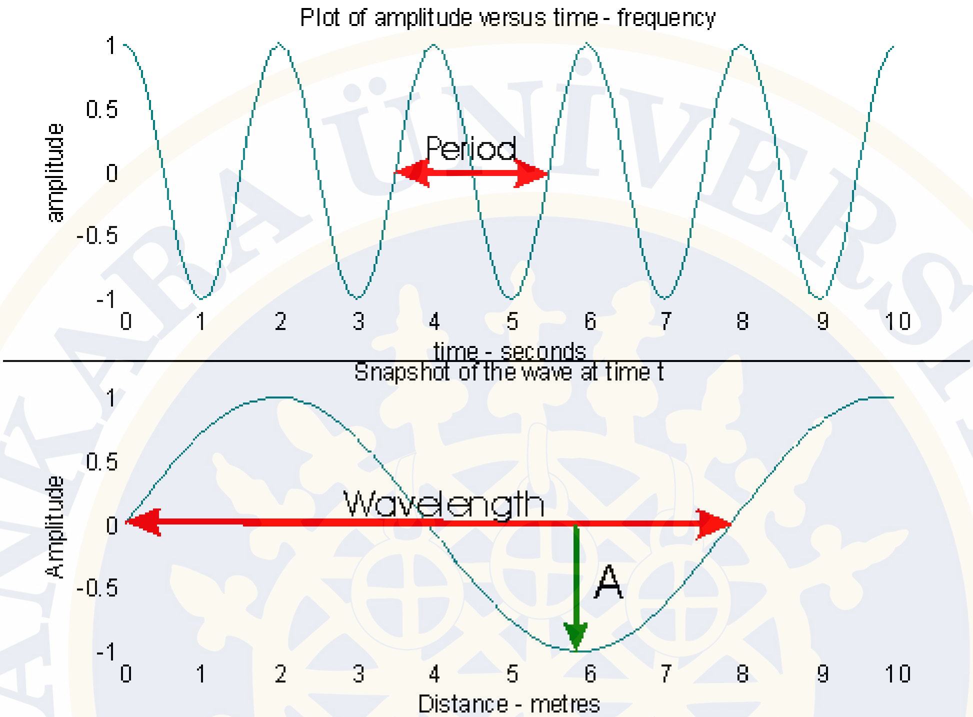
Açısal frekans	ω	$\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T} = ck$
Frekans	f	$f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{T} = \dfrac{c}{\lambda}$
Periyot	T	$T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{\lambda}{c}$
Hız	c	$c = \dfrac{\lambda}{T} = f\lambda = \dfrac{\omega}{k}$
Dalga boyu	λ	$\lambda = \dfrac{c}{f} = cT = \dfrac{2\pi}{k}$
Dalga sayısı	k	$k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi f}{c}$

3.1.2 Küresel Dalgalar

Dalga denkleminin diğer bir çözümü de küresel dalgalar içindir. Skaler dalga denklemi için bu çözümü elde etmek, potansiyel ve küresel koordinatlardaki Laplacian tanımıyla mümkündür. Nokta kaynak için, ϕ'nin yarıçap (r) ve zamanın (t) fonksiyonu olduğu simetrik küresel bir çözüm düşünelim. Küresel simetrik çözüm için dalga denklemi,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \tag{29}$$

r=0'ın dışındaki bütün noktalar için bu denklemin çözümü şu şekilde tanımlanabilir;



Şekil 3.3 Periyot ve dalga boyu kavramları.

$$\phi(\mathbf{r},t)=\frac{f(t\pm r/\alpha)}{r} \tag{30}$$

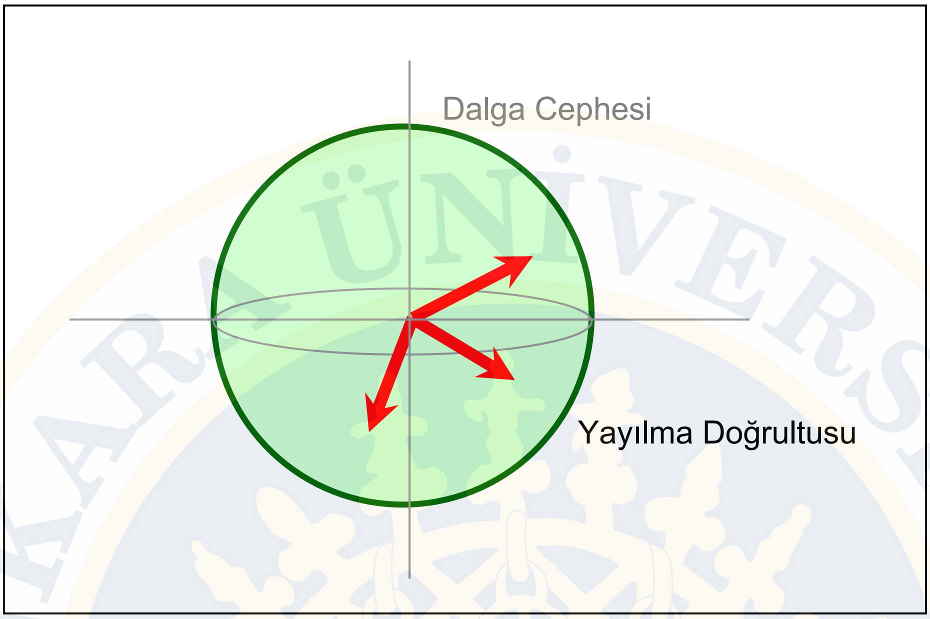
Burada f, herhangi bir fonksiyondur. Bu fonksiyon, başlangıç noktası merkezli ve genliği merkezden olan uzaklığa bağlı küresel dalga cephesini tanımlamaktadır. Dikkat edilirse bu eşitlik $1/r$ faktörü dışında, düzlem dala denklemine benzerdir. Fonksiyon içerisindeki eksi işareti, genliğin $1/r$ ile azaldığı merkezden dışa doğru yayılımı, artı işareti ise genliğin arttığı merkeze doğru yayılımı göstermektedir.

$$\phi(\mathbf{r},t)=\frac{f(t-r/\alpha)}{r} \tag{31}$$

eşitliği, tekdüze olmayan dalga denklemine karşılık gelmektedir.

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r},t)-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-4\pi\delta(\mathbf{r})f(t) \tag{32}$$

Bu, merkezde yer alan zaman bağımlı $f(t)$ nokta kaynağa karşılık gelmektedir. Sismik dalga yayılımında çoğu zaman, kaynağa olan uzaklık çok büyükse küresel dalgalar düzlemsel dalga gibi düşünülmektedir.



Şekil 3.4 Küresel dalga yayılımı.