

4.1.1. Cisim Dalgalarına Ait Işın Geometrisi ve Zaman-Uzaklık Eğrileri

Deprem dalgalarının, odaktan kayıt istasyonuna kadar gelmeleri için geçen zamana *seyahat zamanı*, *yol-alış zamanı* veya *geçiş zamanı* (*travel time*) denir. Bu zamanın, uzaklığın fonksiyonu olarak çizilmesinden elde edilen eğrilere ise *zaman-uzaklık eğrileri* denir. Zaman-uzaklık eğrileri, dalga fazlarının saptanmasında oldukça yararlıdır. Ayrıca bir depremin dış-odak (episantr) uzaklığının belirlenmesinde yardımcı olurlar. Bu eğriler yardımı ile dalga hızlarının belirlenmesi ve değişiminin saptanması, yer yapısının katmanlı olup olmadığı incelenir. Sismik dalga hızı yüksek ya da düşük olan katmanların varlığı ortaya çıkarılabilir. Kaynaktan alıcıya doğru yayılan dalganın dalga cephesine dik noktalarının oluşturduğu yola ise ışın geometrisi denir.

Zaman-uzaklık eğrileri ve ışın geometrisi, kaynak ve alıcı arasındaki uzaklığa bağlı olarak iki farklı ortamda incelenirler. Bunlar,

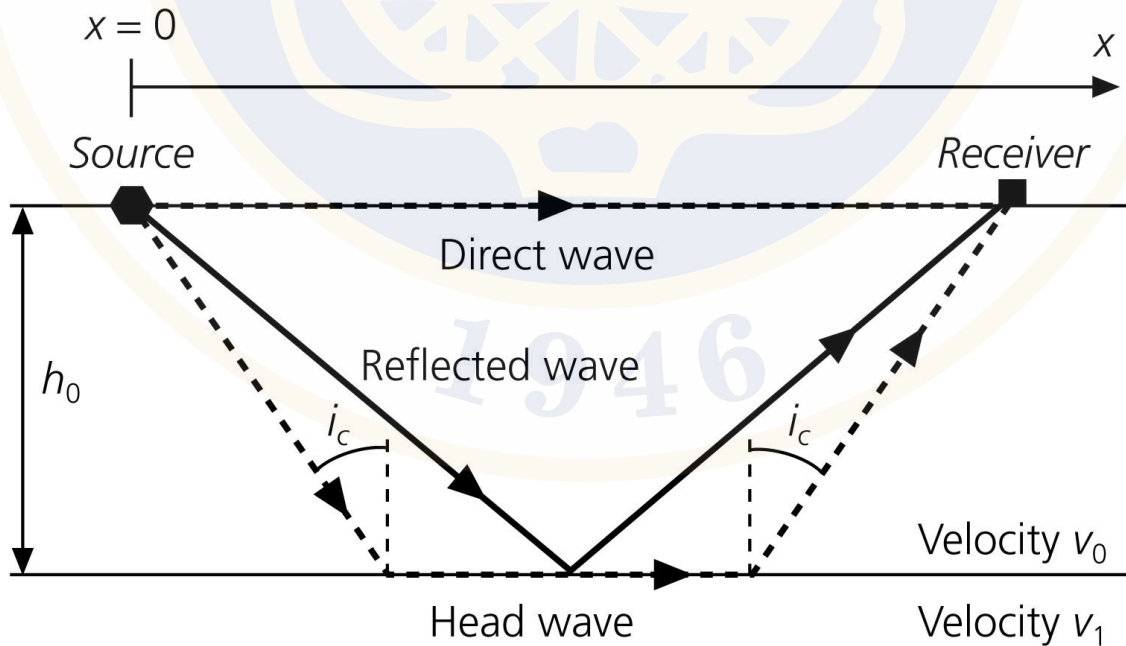
- Katmanlı yer modeli
- Küresel yer modeli

4.1.1.1. Katmanlı yer modeli

Katmanlı bir yapı içerisinde, kaynaktan alıcıya üç tür dalga gelir (Şekil 4.10). Bunlar,

- a) Doğrudan gelen dalga,
- b) Yansiyarak gelen dalga,
- c) Kırılarak gelen dalga (baş dalgası)

dır.



Şekil 4.10. Katmanlı ve yarı sonsuz yer modeli için ışın yolları.

a) Doğrudan gelen dalga, kaynaktan çıktıktan sonra herhangi bir şekilde yansımada veya kırılmada direk olarak ilk katman içerisinde geçip alıcılara giden dalgadır. Bu tür dalgalara ait, seyahat zamanı,

$$t_d = \frac{x}{V_1} \quad (1)$$

bağıntısı ile verilmektedir. Burada x , kaynak ile alıcı arasındaki yatay uzaklıktır.

b) Yansıyarak gelen dalga, kaynaktan çıktıktan sonra sismik hızları farklı iki katmanın ara yüzeyinden yansıyarak alıcılara ulaşan dalgadır.

$$t_y = \frac{SC}{V_1} + \frac{CR}{V_1} \quad (2)$$

$$\overline{SC} = \overline{CR} = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2} \quad (3)$$

$$t_y = \frac{2}{V_1} \sqrt{h^2 + \frac{x^2}{4}} \quad (4)$$

t_y 'nin zaman-uzaklık eğrisi bir hiperboldur. Ayrıca $x = 0$ için,

$$t_y = \frac{2h}{V_1} \quad (5)$$

olur.

c) Kırılarak gelen baş dalgası ise yine hızları farklı iki katmanın ara yüzeyine belirli bir açıyla (kritik açı) gelip, burada 90° 'lik açıyla kırılarak ikinci katmana geçen ve ara yüzeye paralel bir şekilde ikinci katman içerisinde seyahat ederek aynı kritik açıyla tekrar birinci katmana geçip alıcılara ulaşan dalgadır. Baş dalgalarının oluşabilmesi için $i_2 > i_c$ olması gerekir. Bu dalgalar için seyahat zamanı,

$$t_k = \frac{SA}{V_1} + \frac{AB}{V_2} + \frac{BR}{V_1} \quad (6)$$

şeklindedir. Geometrik ifadeler yerine yazılırsa,

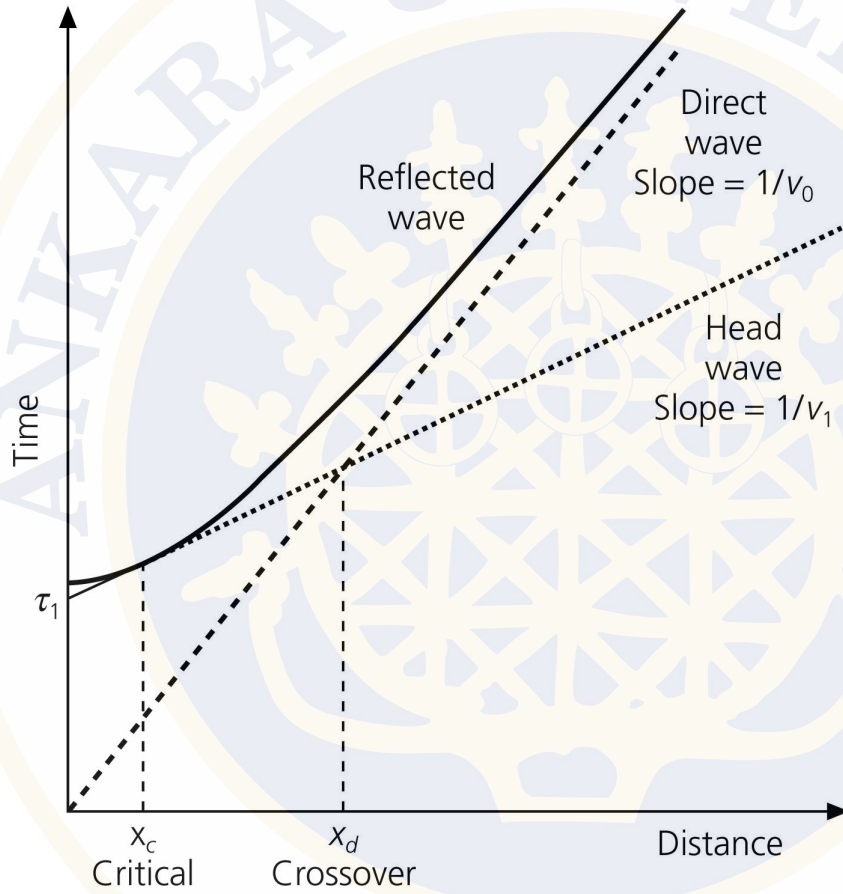
$$t_k = \frac{x - 2h \tan i_c}{V_{21}} + \frac{2h}{V_1 \cos i_c} = \frac{x}{V_2} + 2h \left(\frac{1}{V_1 \cos i_c} - \frac{\tan i_c}{V_2} \right) \quad (7)$$

(7) ifadesi düzenlenirse,

$$t_k = \frac{x}{V_2} + \frac{2h}{V_1} \sqrt{1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2} \quad (8)$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı, $t=mx+b$ eşitliğine benzer bir bağıntıdır ve bir doğru denklemini tanımlamaktadır. $x = 0$ için elde edilecek olan kesme zamanı,

$$t_k(0) = \tau_1 = \frac{2h}{V_1} \sqrt{1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2} \quad (9)$$



Şekil 4.11. Katmanlı ve yarı sonsuz yer modeli için seyahat zamanı eğrileri.

Kısa mesafelerde sadece yansıyan ve doğrudan gelen dalgalar oluşur. Zaman-uzaklık grafiklerinde doğrudan gelen dalgalar düz bir çizgi şeklinde, yansıyan dalgalar ise bir hiperbol şeklinde görünür (Şekil 4.11). Belirli bir kritik uzaklıktan itibaren kırılıp gelen baş dalgaları da oluşmaya başlar. Bu kritik uzaklık,

$$x_c = 2h \tan i_c \quad (10)$$

veya

$$x_c = \frac{2hV_1}{\sqrt{V_2^2 - V_1^2}} \quad (11)$$

bağıntıları ile kolayca hesaplanabilir. Burada i_c , kritik açıdır. Doğrudan gelen dalgalar, çapraz mesafeye (x_d) kadar en hızlı gelen dalgalardır ve kayıtlarda tamamen ilk varışları oluştururlar. Bu mesafeden sonra ise baş dalgaları artık ilk gelen dalgalar olur. Çapraz mesafedeki seyahat zamanı, hem baş dalgaları hem de doğrudan gelen dalgalar için eşit olacağından, çapraz mesafeyi izleyen eşitliklerdeki gibi hesaplayabiliriz.

$$t_d(x_d) = t_k(x_d) \quad (12)$$

$$\frac{x_d}{V_1} = \frac{x_d}{V_2} \quad (13)$$

$$\frac{x_d}{V_1} = \frac{x_d}{V_2} + \frac{2h}{V_1} \sqrt{1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2} \quad (14)$$

bu ifade düzenlenirse çapraz mesafe,

$$x_d = 2h \sqrt{\left(\frac{V_2 + V_1}{V_2 - V_1}\right)} \quad (15)$$

bağıntısı ile verilir. Şekil 4.11.'deki seyahat-zamanı eğrilerinden de görüleceği üzere, doğrudan gelen ve baş dalgalarına ait eğrilerin eğimlerinden katmanlara ait hız değerleri bulunduğundan sonra katman kalınlığı h ,

- Kesme zamanı $t_k(0)$,
- Kritik mesafe x_c (çok doğru sonuç vermese de)
- Çapraz mesafe x_d

bağıntılarından hesaplanabilir.

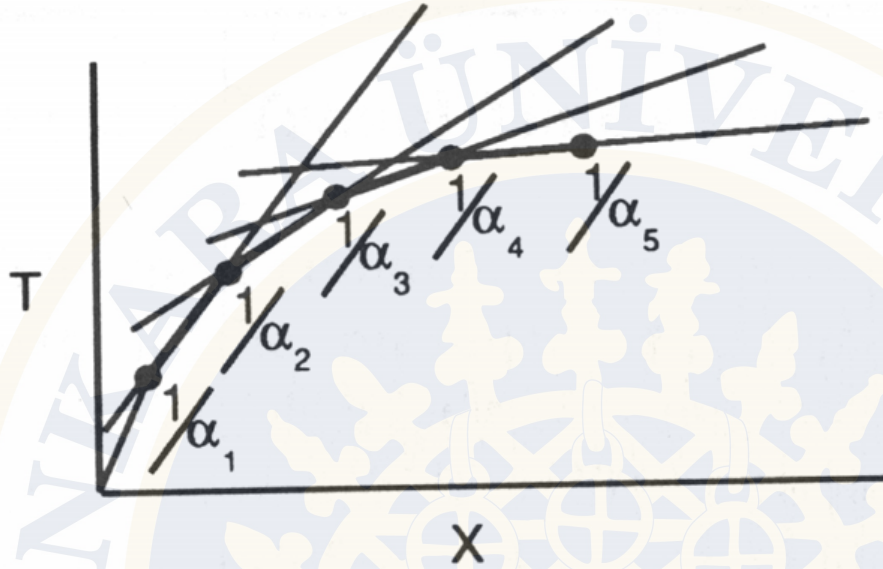
Katmanlı yer modeli için ışın parametresi

Katmanlı düz bir yer modeli için Snell yasası şu şekilde olacaktır;

$$\frac{\sin i_1}{V_1} = \frac{\sin i_2}{V_2} = \dots = \frac{\sin i_n}{V_n} = \text{sabit} \equiv p \quad (16)$$

Burada p , ışın parametresidir. Snell yasası, ışın parametresinin hız ile ters, yavaşlık ile doğru orantılı olduğunu göstermektedir. Işın parametresi, ışının geçtiği yol boyunca sabit kalan geometrik bir özelliktir. Aynı ışının, iletiminde, yansımada, kırılmasında ve faz dönüşümünde değişmez bir sabittir. Eğer ışın parametresi farklı ise farklı ışınlardan söz ediliyor demektir. Işın parametresi sismolojide önemli bir rol oynamaktadır.

Hızın derinlikle birlikte arttığı çok katmanlı bir yer yapısı için seyahat zamanı eğrisi, her ara yüzeyden gelen birçok baş dalgasının oluşturduğu parçalardan meydana gelecektir (Şekil 4.12). Eğer katman sayısı, sonsuza ve katman kalınlıkları da sıfıra gidecek olursa, derinlikle artan sürekli bir hız modeli elde edilmiş olur. Böyle bir yer modelinden elde edilecek zaman-uzaklık eğrisi ise, her bir ara yüzeydeki baş dalgalarının ilk varışlarına ait sonsuz küçük parçadan oluşmuş bir eğri görünümünde olacaktır (Şekil 4.13). Zaman-uzaklık eğrisinin üzerinde bulunan herhangi bir X uzaklığındaki noktanın eğiminin tersi, o uzaklıkta yüzeye gelen ışınların en derin noktadaki hızına eşittir.



Şekil 4.12. Hızın derinlikle arttığı birçok katmandan oluşmuş yer yapısından elde edilen seyahat zamanı eğrisi. İlk varışlar her bir ara yüzeyden elde edilen baş dalgalarının geliş zamanlarından oluşmuştur.

Işın parametresi, diğer bir deyişle yavaşlılık, seyahat zamanının yatay uzaklığa göre türevidir. Yani,

$$\frac{dT}{dX} = p = \frac{1}{V} \quad (16)$$

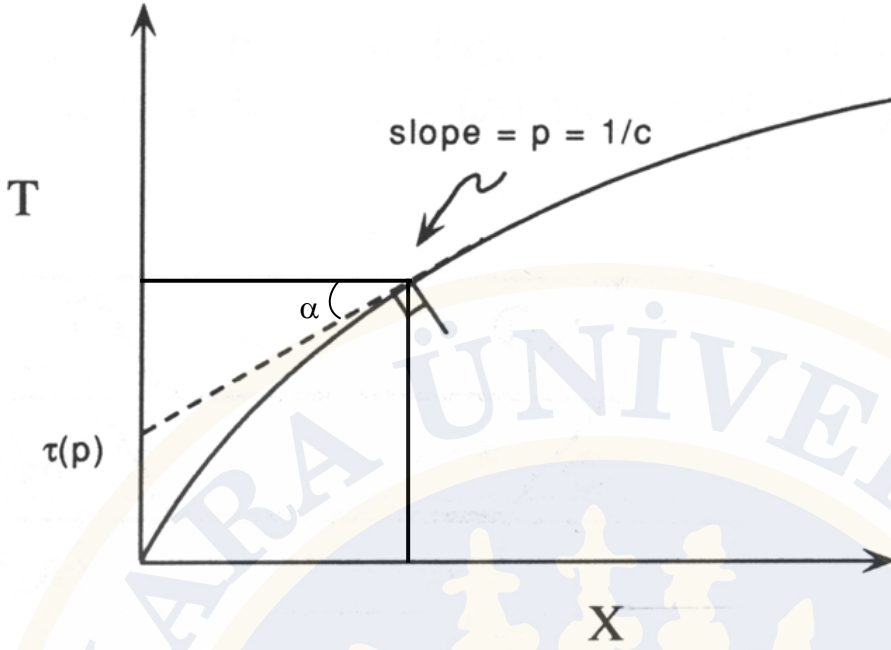
Eğri üzerindeki noktadan geçen teğetin zaman eksenini kestiği nokta yani $X = 0$ noktası , kesme zamanı ya da gecikme zamanı $\tau(p)$ olarak tanımlanır ve

$$\tan \alpha = p = \frac{T(p) - \tau(p)}{X(p)} \quad (17)$$

$$pX(p) = T(p) - \tau(p)$$

$$\tau(p) = T(p) - pX(p)$$

şeklinde matematiksel olarak gösterilir.

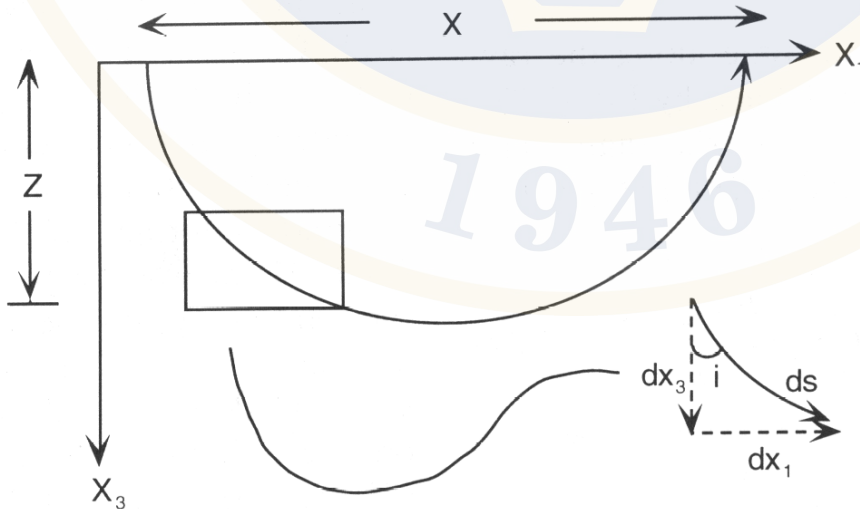


Şekil 4.13. Derinlikle artan sürekli bir hız modeli için zaman-uzaklık eğrisi.

Hızın sürekli arttığı, katmanlı düz yerküre modeli için, seyahat zamanı bağıntısının birinci türevi alınırsa, Şekil 4.14'deki yer değiştirme geometrisi elde edilir. Işın boyunca her noktanın geometrik ifadesi

$$\begin{aligned} \sin i &= \frac{dx}{ds} = pV \\ \cos i &= \frac{dz}{ds} = \sqrt{1 - \sin^2 i} = \sqrt{1 - p^2 V^2} \end{aligned} \quad (18)$$

şeklinde olacaktır. Işın parametresi her nokta için sabittir. Burada V , her noktadaki yerel hızı tanımlamaktadır. Buradan,



Şekil 4.14. Yüzeyledeki kaynaktan alıcıya kadar, yol boyunca ışın parçasının, ds , geometrisi. Ortamın hızı sadece dz doğrultusu boyunca değişmektedir.

$$\begin{aligned}
dx &= ds \sin i = \frac{dz}{\cos i} pV \\
&= \frac{pV}{\sqrt{1-p^2V^2}} dz
\end{aligned} \tag{19}$$

dönüşümleri kullanılarak tüm yol boyunca integrali alınırsa,

$$X = 2 \int_0^z \frac{p}{\sqrt{\frac{1}{V^2} - p^2}} dz \tag{20}$$

şeklinde uzaklık bağıntısı elde edilir. İntegral ifadesindeki z , maksimum nüfuz derinliğini göstermektedir. 2 katsayısı ise ışın geometrisinin simetrikliğinden dolayı aşağı ve yukarı giden ışın yolunu tanımlamaktadır. Bu eşitlik, herhangi bir odak çıkış açısı için verilen bir ışın parametresi ve hız yapısı için ışının gidebileceği en uzak mesafeyi vermektedir. 3-boyutlu ortam için genelleştirmek gerekirse bu ifadeye kaynağa bağlı olarak ışın yolunun azimutu da eklenecektir. Işın gideceği yol boyunca harcayacağı zaman ise yukarıdaki ifadelere benzer şekilde hesaplanabilir.

$$\begin{aligned}
dT &= \frac{ds}{V} \\
T &= \int_{\text{yol}} \frac{ds}{V(s)} = 2 \int_0^z \frac{dz}{V(z) \cos i}
\end{aligned} \tag{21}$$

(21) bağıntısı düzenlenirse,

$$T = 2 \int_0^z \frac{dz}{V^2 \sqrt{\frac{1}{V^2} - p^2}} \tag{22}$$

şeklinde bulunur. Işın parametresi, p , yol boyunca sabit olduğundan integral dışına alınabilir. X ve T ifadelerinin benzerliklerinden yararlanarak, bu iki ifadeyi birbirine bağlı şekilde yazarsak, seyahat zamanını X ve z 'ye bağlı iki terim şeklinde tanımlayabiliriz. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned}
T &= 2 \int_0^z \frac{dz}{V^2 \sqrt{\frac{1}{V^2} - p^2}} \\
&= 2 \int_0^z \left(\frac{p^2}{\sqrt{\frac{1}{V^2} - p^2}} + \sqrt{\frac{1}{V^2} - p^2} \right) dz
\end{aligned} \tag{23}$$

$$T = pX + 2 \int_0^z \sqrt{\frac{1}{V^2} - p^2} dz$$

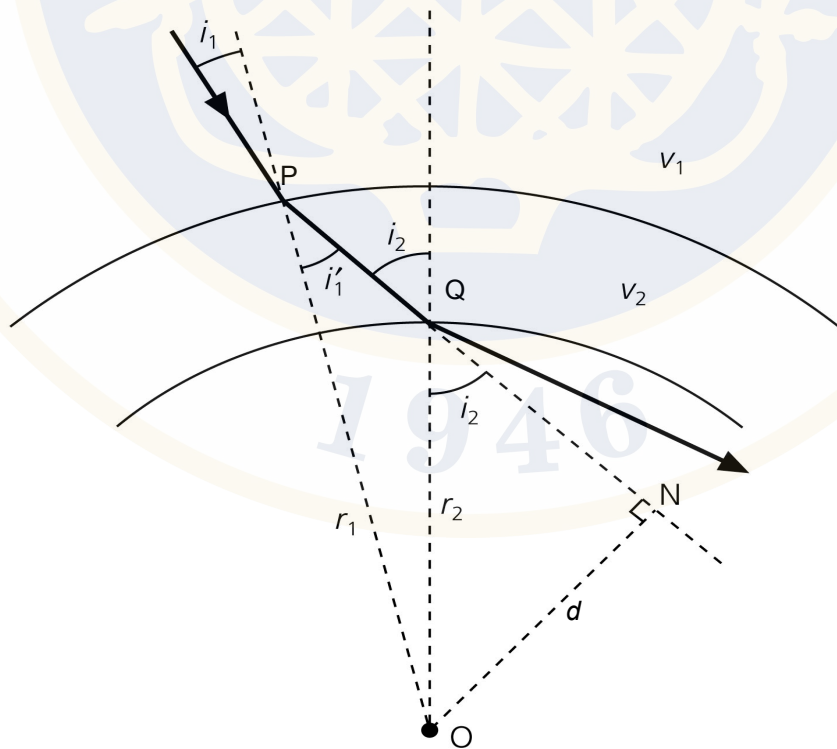
şeklinde seyahat zamanı bağıntısı elde edilir. Böylece seyahat zamanı, yatay ve düşey bileşenlerine ayrılmış olur. Düşey seyahat zamanları $\sqrt{(1/V^2) - p^2}$ 'ye bağlı iken, yatay seyahat zamanları sadece p 'ye bağlıdır. Seyahat zamanı eğrisine geri dönülecek olursa, (17) bağıntısı kullanılarak

$$\tau(p) = T - pX = 2 \int_0^p \sqrt{\frac{1}{V^2} - p^2} dz \quad (24)$$

elde edilir. Bu bağıntıya göre, p değerleri arttıkça (odak çıkış açısı küçüldükçe) X uzaklığı ve τ zamanı azalmaktadır. $\tau(p)$, tek değerli bir fonksiyondur ve zaman uzaklık eğrilerinden kolayca hesaplanabilmektedir.

4.1.1.2. Küresel yer modeli

Bir önceki bölümde, katmanlı ve düz yer küre modeli için türetilen seyahat zamanı bağıntıları, kısa mesafeler için, $X < 12^\circ \cong 1000$ km, yer kürenin eğriselliğinden kaynaklanan problemlerin ihmal edilmesi şartıyla doğrudur. Ancak yerin küresel bir şekle sahip olmasından kaynaklanan eğrisellik, bu mesafeden daha uzak bölgeler için önemli olmaya başlamaktadır. Bu nedenle yerin eğriselliğini hesaba katmak için Snell yasası ve ışın parametresi kavramlarının yeniden düzenlenmesi gerekmektedir. Bunun için, Şekil 4.15'de gösterildiği gibi, yer kürenin ince, eş-merkezli ve her biri kendi içerisinde sabit hıza sahip fakat bu hız değerlerinin derinlikle arttığı katmanlardan oluştuğunu düşünelim.



Şekil 4.15. Katmanlı küresel yer modeli içerisindeki ışın geometrisi. Burada $V_1 < V_2$

Düz yer küre modelinde olduğu gibi, bir ara yüzeye gelen ışın için Snell yasası uygulanırsa,

$$\frac{\sin i_1}{V_1} = \frac{\sin i'_1}{V_2} \quad (25)$$

olacaktır. Şekil 4.15'deki geometrik yapıyı düşünürsek,

$$\sin i'_1 = \frac{ON}{OP} = \frac{d}{r_1} \quad \text{ve} \quad \sin i_2 = \frac{ON}{OQ} = \frac{d}{r_2}$$

buradan (26)

$$\sin i'_1 = \frac{r_2 \sin i_2}{r_1}$$

Buna göre (25) bağıntısını yeniden yazarsak,

$$\frac{r_1 \sin i_1}{V_1} = \frac{r_2 \sin i_2}{V_2} = \dots = \frac{r \sin i}{V} = \text{sabit} \equiv p \quad (27)$$

Bu durumda küresel yer modeli için ışın parametresi,

$$p = \frac{r \sin i}{V} \quad (28)$$

olarak verilmektedir. Burada r , yerin merkezinden ışın yolu üzerindeki herhangi bir noktaya olan yarıçap değeridir. V ise o yarıçaptaki dalga hızıdır. Düz yer modeli için ışın parametresinin birimi sn/km veya sn/m iken küresel yer modeli için bu birim sn/radyan veya sn/derecedir. Buradan da görüleceği üzere, her iki yer modeli için hesaplanan ışın parametreleri arasında sadece ölçek farklılığı bulunmaktadır.

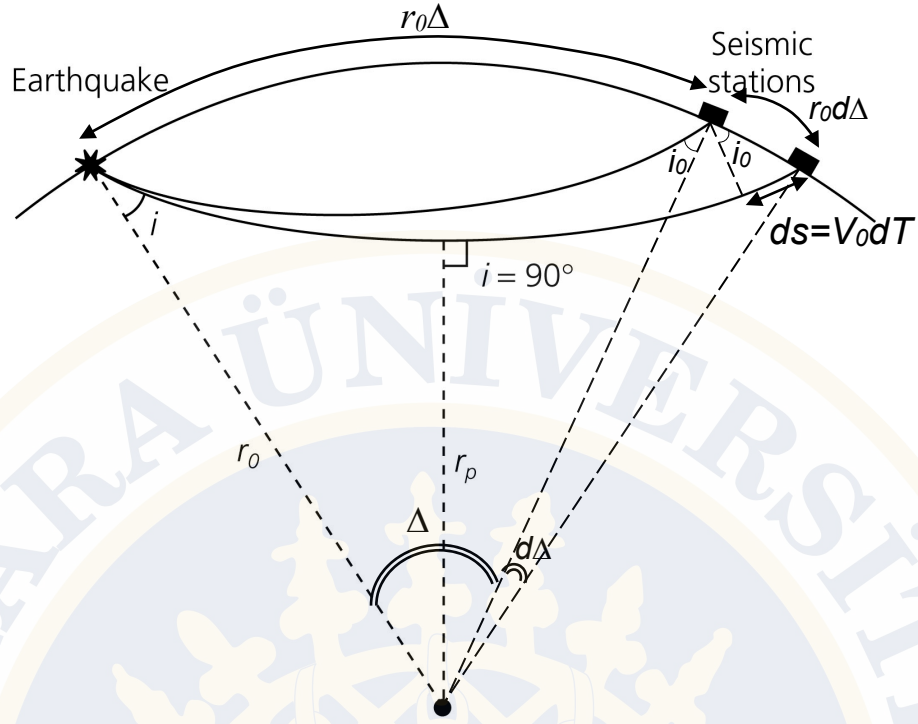
Şekil 4.16'daki gibi aynı kaynaktan çıkan birbirine yakın iki ışın düşünelim. Bu iki ışına ait parametreler p , Δ , ve T (kaynak parametresi, açılal uzaklık ve seyahat zamanı) ile $p+dp$, $\Delta+d\Delta$, ve $T+dT$ olsun. Problemin geometrisinden dolayı, aşağıdaki şekildeki gibi bir ifade yazabiliriz.

$$\sin i_0 = \frac{ds}{r_0 d\Delta} = \frac{V_0 dT}{r_0 d\Delta} \Rightarrow \frac{r_0 \sin i_0}{V_0} = \frac{dT}{d\Delta} = p \quad (29)$$

Buradaki ışın parametresi p , düz yer modelinde olduğu gibi doğrudan zaman-uzaklık eğrisinin eğimidir. Tek farkı uzaklık ifadesinin açılal cinsten olmasıdır. Birimi de sn/radyan ya da sn/derecedir. (29) bağıntısındaki V_0 ise küresel yer modelindeki yüzey hızıdır. Işının döndüğü noktadaki ($i_0 = 90^\circ$ için) ışın parametresi değeri,

$$p = (\sin 90^\circ) \frac{r_p}{V_p} = \xi_p \quad (30)$$

olacaktır.



Şekil 4.16. Aynı kaynaktan çıkan birbirine yakın iki ışına ait ışın yolları.

Küresel yer modelinde, kaynaktan çıkıp alıcıya giden bir ışına ait zaman ve uzaklığın hesabı için Şekil 4.17'deki gibi ışın üzerinde birbirinden ds kadar uzaklıkta bulunan iki noktayı düşünelim. ds kadarlık ışın parçasına karşılık gelen yer merkezindeki açı ise $d\Delta$ olsun. Buna göre,

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (rd\Delta)^2 \quad (31)$$

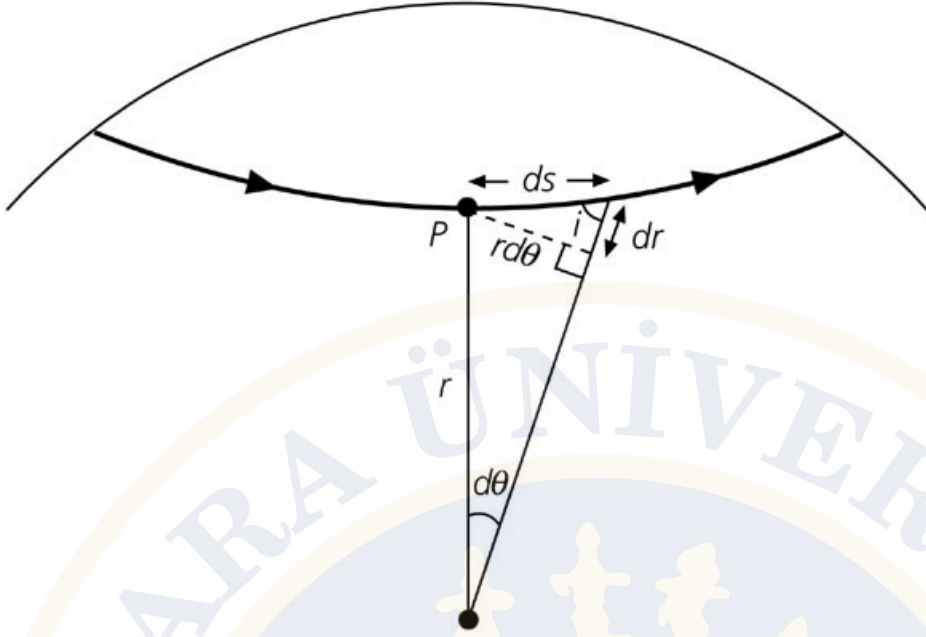
ve

$$rd\Delta = dr \tan i = dr \frac{\sin i}{\cos i} \quad (32)$$

dir. (28) eşitliğinden, $\sin i = \frac{pV}{r}$ 'i (32) eşitliğinde yerine yazarsak,

$$rd\Delta = dr \frac{\sin i}{\cos i} = dr \frac{\frac{pV}{r}}{\sqrt{1 - \left(\frac{pV}{r}\right)^2}} \quad (33)$$

elde ederiz. Buradan,



Şekil 4.17. Yarıçap r , ve açı $d\theta$ anlamında ds 'nin tanımı.

$$d\Delta = \frac{P}{r \sqrt{\left(\frac{r}{V}\right)^2 - p^2}} dr \quad (34)$$

olarak yazılabilir. Bu bağıntının, kaynaktan alıcıya doğru ilerleyen ışın boyunca, kaynaktan ışının en derin P noktasına kadar integrali alınıp 2 ile çarpılırsa, (35) bağıntısında gösterildiği gibi açısal olarak kaynak-istasyon arası uzaklık bulunmuş olur.

$$\Delta = 2 \int_{r_i}^{r_0} \frac{P}{r \sqrt{\left(\frac{r}{V}\right)^2 - p^2}} dr \quad (35)$$

Burada r_0 , yerin yarıçapı; r_i ise ışının nüfuz ettiği en derin noktanın yerin merkezine olan uzaklığıdır. Şekil 8'deki ışın, ds yolunu V hızı ile kat ederse, harçayacağı zaman dT ,

$$dT = \frac{ds}{V} \quad (36)$$

olur. Ayrıca yine geometrik ifadelerin kullanılması ile

$$\begin{aligned}
ds &= \frac{dr}{\cos i} = \frac{dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{pV}{r}\right)^2}} \\
&= \frac{rdr}{V \sqrt{\left(\frac{r}{V}\right)^2 - p^2}}
\end{aligned} \tag{37}$$

elde edilir. Bu bağıntı (36) eşitliğinde yerine yazılarak uzaklık ifadesinin bulunmasındaki gibi kaynaktan P noktasına kadar integrali alınıp, 2 ile çarpılırsa ışının seyahat süresi bulunmuş olur.

$$dT = \frac{ds}{V} = \frac{rdr}{V^2 \sqrt{\left(\frac{r}{V}\right)^2 - p^2}} \tag{38}$$

$$T = 2 \int_{r_i}^{r_0} \frac{rdr}{V^2 \sqrt{\left(\frac{r}{V}\right)^2 - p^2}} \tag{39}$$

Düz yer modeli için elde edile (23) bağıntılarına benzer şekilde (39) bağıntısı da yatay ve düşey seyahat zamanı bileşenlerine ayrılırsa,

$$T = p\Delta + 2 \int_{r_i}^{r_0} \frac{\sqrt{\left(\frac{r}{V}\right)^2 - p^2}}{r} dr \tag{40}$$

şeklinde bir bağıntı elde edilir. Verilen bir ışın parametresi için, eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim sadece Δ 'ya yani *yüzeydeki yatay mesafeye*, ikinci terim ise sadece r 'ye yani *düşey mesafeye* bağlıdır.

Özet olarak, düz yer modeli ile küresel yer modeli için kullanılan zaman-uzaklık bağıntıları Tablo 4.1'de verilmiştir.

Tablo 4.1. Düz ve küresel yer modeli için tanımlamalar.

	Düz Yer Modeli	Küresel Yer Modeli
<i>Uzaklık</i>	X (m, km)	Δ (derece)
<i>Işın Parametresi</i>	$p = \frac{\sin i}{V}$ (sn/km, sn/m)	$p = \frac{r \sin i}{V}$ (sn/rad, sn/deg)
<i>Uzaklık</i>	$X = 2 \int_0^z \frac{p}{\sqrt{\frac{1}{V^2} - p^2}} dz$	$\Delta = 2 \int_{r_i}^{r_0} \frac{p}{r \sqrt{\left(\frac{r}{V}\right)^2 - p^2}} dr$
<i>Zaman</i>	$T = 2 \int_0^z \frac{dz}{V \sqrt{\frac{1}{V^2} - p^2}}$	$T = 2 \int_{r_i}^{r_0} \frac{r dr}{V \sqrt{\left(\frac{r}{V}\right)^2 - p^2}}$
<i>Zaman Bileşenleri</i>	$T = pX + 2 \int_0^z \sqrt{\frac{1}{V^2} - p^2} dz$	$T = p\Delta + 2 \int_{r_i}^{r_0} \frac{\sqrt{\left(\frac{r}{V}\right)^2 - p^2}}{r} dr$

Dalga Hızının Derinliğin Fonksiyonu Olarak Hesaplanması (Wiechert-Herglotz Ters Çözüm Yöntemi)

Hızın derinliğin fonksiyonu olarak yavaş bir şekilde arttığı küresel bir ortam içerisinde, yüzeyde bulunan bir deprem odağından kayıt istasyonuna doğru ilerleyen bir dalga düşünelim (Şekil 4.16). Bu dalgaya ait zaman ve uzaklık bağıntılarının çıkarılması bir önceki bölümde anlatılmıştı. Hızın derinlikle değişimini ters çözüm yöntemi ile belirleyebilmek için, gözlemsel zaman-uzaklık eğrileri $T(\Delta)$ kullanılır. Eğer $T(\Delta)$ eğrisi, çok iyi bir şekilde örneklenecek elde edilmişse, $p(\Delta) = dT(\Delta)/d\Delta$ zaman-uzaklık eğrisinin eğiminden belirlenebilir. Fakat gerçekte, gerek ölçüm hatalarından gerekse üç boyutlu ortam içerisindeki düzensizliklerden dolayı asla mükemmel bir eğri elde etmek mümkün değildir.

Sözü edilen ışının, yer içerisinde en derin noktasındaki hızı bulmaya çalışalım. Bu ışın boyunca ışın parametresinin, $p = r \sin i/V$ olduğunu biliyoruz. O halde en derin nokta ile kayıt istasyonu arası için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$p = \frac{r_i}{V_i} = \frac{r_0 \sin i_0}{V_0} \quad (41)$$

Buradan

$$V_i = \frac{r_i V_0}{r_0 \sin i_0} \quad (42)$$

dir. (29) bağıntısını kullanarak ve $d\Delta/dT = \bar{V}_\Delta$ tanımı yaparak, V_i için

$$V_i = \bar{V}_\Delta \frac{r_i}{r_0} \quad (43)$$

elde edilir. Burada \bar{V}_Δ , zaman-uzaklık eğrisinden bulunacak olan, Δ kadar uzaklıkta bulunan kaynaktaki görünür hız; r_0 yerin yarıçapı; r_i dalganın geçtiği yol üzerindeki en derin noktanın yarıçapı; V_i ise en derin noktadaki hız değeridir. (29) bağıntısından,

$$p = \frac{r_0 \sin i_0}{V_0} = \frac{r_0}{\bar{V}_\Delta} \quad (44)$$

elde edilir. (43) denklemine göre Δ_r uzaklıkta yüzeye ulaşan bir dalganın en derin noktasındaki hızı

$$V = \bar{V}_{\Delta_r} \frac{r}{r_0} \quad (45)$$

şeklinde elde edilir. Buradan

$$\frac{r}{V} = \frac{r_0}{\bar{V}_{\Delta_r}} \quad (46)$$

elde edilecektir. (44) ve (46) ifadelerinin (35) bağıntısında yerine yazılması ile

$$\Delta = \frac{2}{\bar{V}_{\Delta_r}} \int_{r_i}^{r_0} \frac{d(\log r)}{\sqrt{\frac{1}{\bar{V}_{\Delta_r}^2} - \frac{1}{\bar{V}_{\Delta_i}^2}}} \quad (47)$$

şeklinde bir Abel integral denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü, 1912 yılında Wiechert-Herglotz tarafından bulunmuştur. Çözüm için gerekli işlemlerden sonra

$$\ln \frac{r_0}{r_i} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Delta_i} \cosh^{-1} \left(\frac{\bar{V}_{\Delta_i}}{\bar{V}_{\Delta_r}} \right) d\Delta \quad (48)$$

ifadesi bulunur. Açıların radyan cinsinden olması durumunda (48) bağıntısı geçerlidir. Bu bağıntı \log_{10} ve derece cinsinden yazılmak istenirse,

$$\log r_i = \log r_0 - \frac{15.3599}{r_0} \int_0^{\Delta_i} \cosh^{-1} \left(\frac{\bar{V}_{\Delta_i}}{\bar{V}_{\Delta_r}} \right) d\Delta \quad (49)$$

bulunur. Yine aynı şekilde (48) bağıntısı bu sefer km cinsinden yazılacak olursa,

$$\log r_i = \log r_0 - \frac{0.1382}{r_0} \int_0^{\Delta_i} \cosh^{-1} \left(\frac{\bar{V}_{\Delta_i}}{\bar{V}_{\Delta_r}} \right) d\Delta \quad (50)$$

bağıntısı elde edilerek en derin noktanın yerin merkezine olan uzaklığı km cinsinden hesaplanacaktır. Işının geçtiği en derin noktadaki hız değeri ise (43) bağıntısında kolayca hesaplanabilir.

(48), (49) ve (50) bağıntılarındaki integralin hesaplanması oldukça uzun ve zahmetli olsa da böyle bir çözüm grafik yolla kolayca bulunabilir.