Jordan Kanonik Formu

Ankara Üniversitesi

Tanım

A ve B matrisleri için

$$P^{-1}AP = B$$

olacak biçimde singüler olmayan bir P matrisi mevcutsa, A ve B ye benzer matrisler denir. Ayrıca iki matris benzer ise, özdeğerleri aynıdır.

Tanım

Bir A matrisi $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ köşegen matrisine benzer ise, o zaman A ya köşegenleştirilebilir matris adı verilir.

$A = PDP^{-1}$ olmak üzere $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$ dir. Açıkça

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 & \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_k^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

yazılabilir.

$A = PDP^{-1}$ eşitliğini sağlayan bir P matrisinin kolonları A nın özvektörleridir. λ, A nın özdeğeri ve ξ, A nın özvektörü olmak üzere

$$A\xi = \lambda\xi$$

den λ_i ye karşılık gelen ξ_i özvektörleri bulunursa;

$$A\xi_i = \lambda_i\xi_i$$

olmak üzere $X(n+1) = AX(n)$ sisteminin genel çözümü

$$X(n) = c_1\lambda_1^n\xi_1 + c_2\lambda_2^n\xi_2 + ... + c_k\lambda_k^n\xi_k$$

dir. Burada c_i, $i = 1, 2, ..., k$ keyfi sabitlerdir.

Örnek

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ olmak üzere $x(n+1) = Ax(n)$ sisteminin genel çözümünü yazalım.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

eşitliğinden $\lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ bulunur.

$\lambda_1 = 5$ e karşılık gelen özvektör

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dan

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dir.

$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ için

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

den

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

denklemi elde edilir. $x_1 = 1,\ x_2 = 0$ ve $x_3 = -1$ seçilirse

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

yazılır.

Eğer $x_1 = 0,\ x_2 = 1$ ve $x_3 = -2$ seçilirse

$$\xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

özvektörü elde edilir. Böylece genel çözüm

$$x(n) = c_1 5^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

bulunur.

Jordan Formu

Tanım

$k \times k$ tipinde bir A matrisi köşegenleştirilebilir değilse, o zaman A matrisine bir Jordan formuna benzerdir denir. Yani

$$P^{-1}AP = J$$

olup, burada

$$J = diag(J_1, J_2, ..., J_r), \; 1 \leq r \leq k,$$

ve

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

$i = 1, 2, ..., r$, $s_i \times s_i$ tipindeki matrise Jordan bloğu denir.