Vektör Fark Denklemleri için Kararlılık Teorisi

Ankara Üniversitesi

$f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ ve $x \in \mathbb{R}^k$ olmak üzere $k-$boyutlu

$$x(n+1) = f(n, x(n)) \tag{1}$$

vektör fark denklemini ele alalım. Burada $f(n, x)$ fonksiyonu x e göre sürekli ve $x_0 \in \mathbb{R}^k$ verilmiş bir sabit vektördür.

Tanım

$\forall n \geq n_0$ için

$$f(n, x^*) = x^*$$

eşitliğini sağlayan $x^* \in \mathbb{R}^k$ noktasına (1) denkleminin bir denge noktası veya sabit çözümü denir.

Özel olarak,

$x^* = 0$ denge noktası sıfır çözümü adını alır.

Tanım

$\epsilon > 0$ için $\|x_0 - x^*\| < \delta$ olduğunda

$$\|x(n, n_0, x_0) - x^*\| < \epsilon, \ \ n \geq n_0 \geq 0$$

olacak biçimde bir $\delta = \delta(\epsilon, n_0) > 0$ sayısı varsa, x^* denge noktasına **kararlıdır** denir. Eğer, $\delta = \delta(\epsilon)$ ise, x^* denge noktasına **düzgün kararlıdır** denir.

Tanım

Kararlı olmayan x^* denge noktasına **kararsızdır** denir.

Tanım

$\|x_0 - x^*\| < \mu$ olduğu zaman

$$\lim_{n\to\infty} x(n, n_0, x_0) = x^*$$

olacak şekilde bir $\mu = \mu(n_0)$ sayısı varsa, x^* denge noktasına **atraktiftir** denir. Eğer μ, n_0 dan bağımsız ise, x^* **düzgün atraktiftir** denir.

Tanım

Kararlı ve atraktif olan denge noktasına **asimptotik kararlıdır** denir.

Tanım

$\|x_0 - x^*\| < \delta$ olduğunda

$$\|x(n, n_0, x_0) - x^*\| \leq M \|x_0 - x^*\| \eta^{n-n_0}$$

olacak şekilde $\delta > 0$, $M > 0$ ve $\eta \in (0, 1)$ sayıları varsa, x^* denge noktasına **üstel kararlıdır** denir.

Tanım

$\forall n \geq n_0$ için
$$\|x(n, n_0, x_0) - x^*\| \leq M$$
olacak şekilde pozitif bir M sabiti varsa, $x(n, n_0, x_0)$ çözümüne **sınırlıdır** denir.