Yüksek Basamaktan Skaler Lineer Homogen Denklemlerin Çözümlerinin Davranışı

Ankara Üniversitesi

k. basamaktan skaler lineer sabit katsayılı homogen

$$x(n+k)+p_1x(n+k-1)+p_2x(n+k-2)+...+p_kx(n)=0 \qquad (1)$$

fark denklemini gözönüne alalım. Burada p_i ler reel sabitler olup $p_k \neq 0$ dır. Bu denkleme ilişkin karakteristik polinom ise,

$$p(\lambda)=\lambda^k+p_1\lambda^{k-1}+p_2\lambda^{k-2}+...+p_k \qquad (2)$$

şeklindedir.

Teorem

(1) in sıfır çözümünün asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul (2) nin her λ *karakteristik kökü için* $|\lambda| < 1$ *olmasıdır.*

Teorem

(1) in sıfır çözümünün kararlı olması için gerek ve yeter koşul, $|\lambda| = 1$ *eşitliğini sağlayan* λ *lar basit olmak üzere,* $|\lambda| \leq 1$ *dir.*

Teorem

$|\lambda| = 1$ *olacak biçimde katlı karakteristik kökler varsa, bu durumda (1) in sıfır çözümü kararsızdır.*

Tanım

Bir $A = (a_{ij})$ matrisinin *iç matrisleri*, o matrisin kendisi, ilk ve son satırları ile ilk ve son kolonlarının atılmasıyla ardışık olarak bulunan matrislerin tümüdür.

Bütün iç matrislerin determinatları pozitif olan bir A matrisine *pozitif iç matrislidir* denir.

Teorem

(Schur-Cohn Kriteri)
(2) karakteristik polinomunun bütün sıfırlarının birim çember içinde kalması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır:

(i) $p(1) > 0$,
(ii) $(-1)^k p(-1) > 0$,
(iii) $(k-1) \times (k-1)$ türündeki

$$A_{k-1}^{\pm} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p_{k-3} & p_{k-4} & \cdots & 1 & 0 \\ p_{k-2} & p_{k-3} & \cdots & p_1 & 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & p_k \\ 0 & 0 & \cdots & p_k & p_{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & p_k & \cdots & p_4 & p_3 \\ p_k & p_{k-1} & \cdots & p_3 & p_2 \end{pmatrix}$$

matrisler pozitif iç matrislidir.

Teorem

(Rouche Teoremi)

$f(z)$ ve $g(z)$ kompleks fonksiyonları basit kapalı bir γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik ve γ üzerinde $|g(z)| < |f(z)|$ ise, bu durumda $f(z)$ ve $f(z) + g(z)$ fonksiyonları γ içinde aynı sayıda sıfırlara sahiptir.

Örnek

$x(n+2) + a_1 x(n+1) + a_2 x(n) = 0$ ikinci basamaktan fark denklemini ele alalım. Burada a_1 ve a_2 reel sabitlerdir. Schur-Cohn kriterinden bu denklemin sıfır çözümünün kararlı olması için gerek ve yeter koşullar

$$0 < 1 + a_1 + a_2, \quad 0 < 1 - a_1 + a_2, \quad 0 < 1 + a_2 < 2$$

şeklinde bulunur.