Faz Uzayı Analizi

Ankara Üniversitesi

$f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ ve $x \in \mathbb{R}^k$ olmak üzere

$$x(n+1) = f(n, x(n)), \ \ n \geqslant n_0, \tag{1}$$

denklemini ele alalım.
Bu denklemin bir çözümü

$$(x_1(n), x_2(n), ..., x_k(n)), \ \ n \geqslant n_0, \tag{2}$$

şeklinde yazılabilir. Bu çözüm $k+1$ boyutlu $nx_1x_2...x_k$ uzayında

$$(n, x_1(n), x_2(n), ..., x_k(n)) \ , \ n \geqslant n_0 \ ,$$

ayrık noktalarından oluşan bir grafiğe sahiptir.

n değişkeni bir parametre olarak düşünülürse, (2) çözümü bir parametrik gösterim olup grafiği k boyutlu $x_1x_2...x_k$-uzayında bulunur.

Tanım

(2) parametrik çözümüne (1) denkleminin bir **yolu** veya **yörüngesi** denir.

Tanım

$x_1x_2...x_k$-uzayına **faz uzayı** denir. Eğer uzay iki boyutu ise, **faz düzlemi** denir.

Özel olarak iki boyutlu lineer sabit katsayılı

$$\begin{cases} x_1(n+1) = a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n), \\ x_2(n+1) = a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) \end{cases}$$

sisteminin kararlılık durumları inceleyelim; burada $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ katsayıları

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

olacak şekilde verilmiş reel sabitlerdir.

Bu sistemi

$$x(n+1) = Ax(n) \tag{3}$$

biçiminde vektör-matris formunda yazabiliri. Burada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \; x(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix}$$

olup A matrisi singüler değildir.

- $Ax^* = x^*$ ya da $(A - I)x^* = 0$ ise, o zaman x^* sabit vektörü (3) sisteminin bir denge noktasıdır.
- $(A - I)$ matrisi singüler değilse, o zaman $x^* = 0$ sıfır vektörü (3) ün tek denge noktasıdır.
- $(A - I)$ matrisi singülerse, o zaman çok sayıda denge noktası vardır.

- $x^* \neq 0$ ise, $y(n) = x(n) - x^*$ dönüşümü (3) sistemine uygulanır ve

$$y(n+1) = Ay(n)$$

bulunur. Dolayısıyla, (3) sisteminin $x^* \neq 0$ şeklinde herhangi bir denge noktası ile aynı sistemin $x^* = 0$ denge noktasının kararlılık durumları aynıdır. Bu yüzden, (3) sisteminin sadece $x^* = 0$ denge noktasını incelemek yeterli olacaktır.

Teorem

A, 2×2 türünde bir reel sabit matris olsun. Bu durumda

$$A = PJP^{-1}$$

olacak şekilde bir singüler olmayan reel P matrisi vardır; burada J Jordan matrisi aşağıdaki formlardan birine sahiptir:

- A matrisi reel λ_1, λ_2 özdeğerlerine ve iki lineer bağımsız özvektöre sahip ise, o zaman

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

dir;

- A matrisi katlı özdeğere sahipse, yani $\lambda_1 = \lambda_2$ ise ve tek bağımsız özvektöre sahip ise,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

dır;

- A nın özdeğerleri $\alpha \pm i\beta$ şeklinde eşlenik kompleks ise, o zaman

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

dır.