Lineerleştirme Yöntemi ve Kararlılık

Ankara Üniversitesi

Lineer olmayan bir fark denklem sistemi

$$x(n+1) = A(n)x(n) + g(n, x(n)) \tag{1}$$

olsun; burada $A(n)$, $k \times k$ tipinde her n için singüler olmayan bir matris ve $g : \mathbb{N} \times G \to \mathbb{R}^k$, $G \subset \mathbb{R}^k$, sürekli bir fonksiyondur. (1) e ilişkin lineer sistem

$$y(n+1) = A(n)y(n) \tag{2}$$

dir. (1) sistemi,

$$x(n+1) = f(n, x(n)) \tag{3}$$

şeklinde lineer olmayan bir denklemin lineerleştirilmesi esnasında ortaya çıkar; burada $f : \mathbb{N} \times G \to \mathbb{R}^k$, $G \subset \mathbb{R}^k$, bir x^* denge noktasında sürekli türevlenebilen bir fonksiyondur (yani, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}|_{x^*}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, mevcut ve $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ türevi x^* ın bir açık komşuluğunda süreklidir).

(3) sisteminin önemli bir özel durumu

$$x(n+1) = f(x(n)) \tag{4}$$

otonom sistemidir. Bu da

$$x(n+1) = Ax(n) + g(x(n)) \tag{5}$$

şeklinde yazılabilir; burada $A = f'(0)$ Jacobian matris ve $g(x) = f(x) - Ax$ dir. f , 0 da türevlenebilir olduğundan, $\|x\| \to 0$ halinde $g(x) = o(x)$ (yani, her $\varepsilon > 0$ için $\|x\| < \delta$ halinde $\|g(x)\| \leqslant \varepsilon \|x\|$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır) ya da eşdeğer olarak

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0$$

dır.

Lemma

(Ayrık Gronwall Eşitsizliği) $(z(n))$ *ve* $(h(n))$, $n \geqslant n_0 \geqslant 0$, *reel sayıların iki dizisi olmak üzere* $h(n) \geqslant 0$ *olsun. Bir* $M > 0$ *için*

$$z(n) \leqslant M\left[z(n_0) + \sum_{j=n_0}^{n-1} h(j)z(j)\right]$$

ise, bu durumda

$$z(n) \leqslant z(n_0)\prod_{j=n_0}^{n-1}(1 + Mh(j)), \quad n \geqslant n_0 ,$$

veya

$$z(n) \leqslant z(n_0)\exp\left(\sum_{j=n_0}^{n-1} Mh(j)\right), \quad n \geqslant n_0 ,$$

dır.

Teorem

$\|x\| \to 0$ halinde düzgün olarak $g(n,x) = o(\|x\|)$ olsun. (2) homogen sisteminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlı ise, bu durumda lineer olmayan (1) sisteminin sıfır çözümü üstel kararlıdır.

Teorem

(i) $\rho(A) = 1$ *ise, (5) sisteminin sıfır çözümü kararlı ya da kararsız olabilir.*
(ii) $\rho(A) > 1$ *ve* $\|x\| \to 0$ *halinde* $g(x) = o(x)$ *ise, o zaman (5) in sıfır çözümü kararsızdır.*

Örnek

$$\begin{cases} x_1(n+1) = x_1(n) + x_2^2(n) + x_1^2(n), \\ x_2(n+1) = x_2(n) \end{cases}$$

sisteminin $(0,0)$ denge noktasının kararsızdır. Bununla birlikte, bu sistemin lineer kısmı

$$\begin{cases} x_1(n+1) = x_1(n), \\ x_2(n+1) = x_2(n) \end{cases}$$

olup

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisi için $\rho(A) = 1$ dir. Öte yandan, aynı lineer kısma sahip olan diğer bir lineer olmayan

$$\begin{cases} x_1(n+1) = x_1(n) - x_1^3(n)x_2^2(n), \\ x_2(n+1) = x_2(n) \end{cases}$$

sistemi için $(0,0)$ denge noktası kararlıdır.

Örnek

Çünkü bu sistem için bir $V(x)$ Lyapunov fonksiyonu

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

şeklinde seçilebilir ve dolayısıyla

$$\Delta V(x(n)) = x_1^4(n)x_2^2(n)(-2 + x_1^2(n)x_2^2(n))$$

olur. Buradan $x_1^2 x_2^2 \leqslant 2$ ise, $\Delta V(x) \leqslant 0$ dır.