Fark Denklemleri için Sınır Değer Problemleri

Ankara Üniversitesi

$$\Delta(p(n-1)\Delta x(n-1)) + q(n)x(n) = 0, \;\; n \in [a+1, b+1], \qquad (1)$$

fark denklemini ele alalım; burada $p(n)$ fonksiyonu $[a, b+1] = \{a, a+1, ..., b+1\}$ üzerinde tanımlı ve pozitif değerli, $q(n)$ fonksiyonu $[a+1, b+1]$ üzerinde tanımlı olup $a, b \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ dir.

Tanım

Aşikar olmayan çözümleri $[a, b+2]$ üzerinde iki ya da daha çok genelleştirilmiş sıfıra sahip olmayan (1) fark denklemine $[a, b+2]$ üzerinde *diskonjugedir* denir.

$Lx(n) = \Delta\left(p(n-1)\Delta x(n-1)\right) + q(n)x(n), \quad n \in [a+1, b+1]$, olmak üzere aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem

$Lx(n) = 0$ denkleminin $[a, b+2]$ üzerinde diskonjuge olması için gerek ve yeter koşul $Lx(n) = 0$ denkleminin $[a, b+2]$ üzerinde bir pozitif çözüme sahip olmasıdır.

Teorem

$[a+1, b+1]$ ($[a+1, \infty)$) üzerinde $q(n) \leqslant 0$ ise, o zaman $Lx(n) = 0$ denklemi $[a, b+2]$ ($[a, \infty)$) üzerinde diskonjugedir.

Teorem

$n \in [a+1, b+1]$ için

$$p(n)r^2 + c(n)r + p(n-1) \leqslant 0$$

olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa, o zaman $Lx(n) = 0$ denklemi $[a, b+2]$ üzerinde diskonjugedir.

Lineer Sınır Değer Problemleri

$$Lx(n) = f(n), \quad n \in [a+1, b+1], \tag{2}$$

$$x(n_1) = A, \quad x(n_2) = B \tag{3}$$

sınır değer problemini ele alalım; burada L operatörü $Lx(n) = \Delta\left(p(n-1)\Delta x(n-1)\right) + q(n)x(n)$ şeklinde olup $f(n)$, $[a+1, b+1]$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon, $a \leqslant n_1 < n_2 \leqslant b+2$, A ve B reel sabitlerdir.

Teorem

$Lx(n) = 0$ denklemi $[a, b+2]$ üzerinde diskonjuge ise, o zaman $(2) - (3)$ sınır değer problemi bir tek çözüme sahiptir.

Sonuç

$Lx(n) = 0$ denklemi $[a, b+2]$ üzerinde diskonjuge ise, o zaman homogen

$$Lx(n) = 0, \quad x(a) = 0, \quad x(b+2) = 0$$

sınır değer probleminin tek çözümü $x(n) \equiv 0$ dır.

Sonuç

$Lx(n) = 0$ denklemi $[a, b+2]$ üzerinde diskonjuge ise, o zaman

$$Lx(n) = f(n), \ x(a) = 0, \quad x(b+2) = 0$$

sınır değer problemi bir tek çözüme sahiptir.

Tanım

(Green fonksiyonu)
Aşağıdaki koşulları sağlayan $G(n,s)$ fonksiyonuna

$$Lx(n)=0, \quad x(a)=0, \quad x(b+2)=0$$

homogen sınır değer problemi için *Green fonksiyonu* denir:
(a) $G(n,s)$, $a \leqslant n \leqslant b+2$, $a+1 \leqslant s \leqslant b+1$ üzerinde tanımlıdır,
(b) $LG(n,s)=\delta_{ns}$, $a+1 \leqslant n \leqslant b+1$, $a+1 \leqslant s \leqslant b+1$, dir; burada δ_{ns} Kronecker deltasıdır, yani; $n \neq s$ için $\delta_{ns}=0$ ve $n=s$ için $\delta_{ns}=1$ dir,
(c) $G(a,s)=G(b+2,s)=0$, $a+1 \leqslant s \leqslant b+1$.

Teorem

$Lx(n) = 0$ denklemi $[a, b+2]$ üzerinde diskonjuge ise, o zaman

$$Lx(n) = 0, \quad x(a) = 0, \quad x(b+2) = 0$$

homogen sınır değer problemi için $(a) - (c)$ koşullarını sağlayan bir tek $G(n,s)$ Green fonksiyonu vardır.