DİNAMİK - 5

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali Dayıoğlu
Ankara Üniversitesi Ziraat Fakültesi
Tarım Makinaları ve Teknolojileri Mühendisliği Bölümü

5. HAFTA

Kapsam:

- Parçacığın çembersel hareketi
- Açısal hız
- Açısal ivme
- Bir noktanın hızı
- Teğetsel ivme
- Normal ivme
- Örnek problem çözümleri

1.8 Parçacığın Çembersel Hareketi

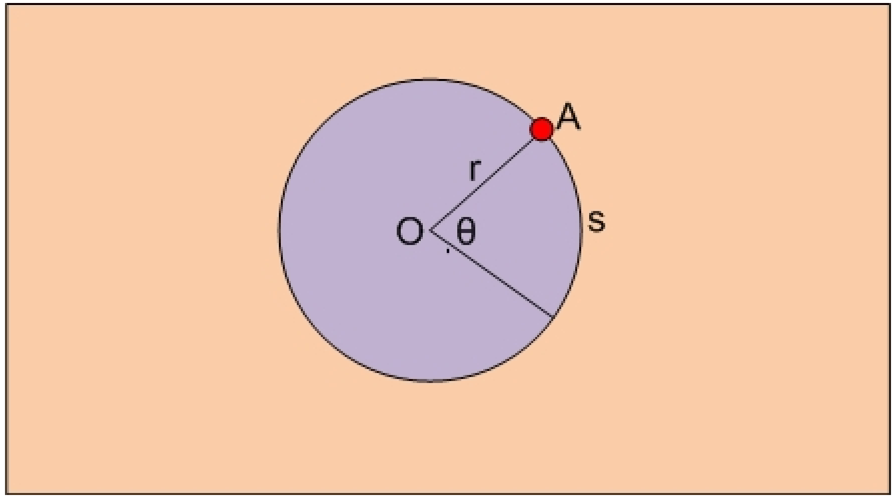
Bir maddesel nokta sabit düzlem içinde bir O noktasından r uzaklığında kalacak şekilde hareket ederse, bu harekete maddesel noktanın çembersel hareketi denir.

$$s = r\theta \quad ,\theta = \theta(t)$$

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega \quad \text{Hız}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d^2\theta}{dt^2} = r\alpha \quad \text{Teğetsel ivme}$$

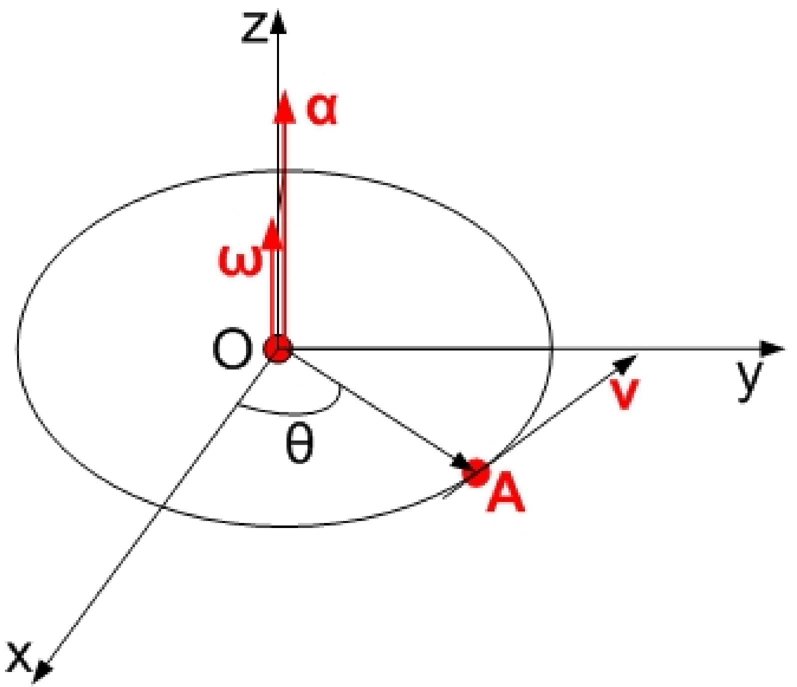
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2 \quad \text{Normal ivme}$$



Çembersel Hareket

Bir maddesel nokta sabit düzlem içinde bir O noktasından r uzaklığında kalacak şekilde hareket ederse, bu harekete maddesel noktanın çembersel hareketi denir.

A noktası çembersel hareketini Oxy düzlemi içinde kalarak yaparsa, ω açısal hız ve α açısal ivme vektörleri Oz ekseni üzerindedir.



Buna göre, A noktasının konum vektörü: **r**(t)=**OA**

Hız vektörü:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t})}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\right) \times \boldsymbol{r}(\boldsymbol{t})$$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{OA}$$

Açısal hız vektörü:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(t)$$

- **Çembersel hareket yapan A noktasının t anındaki hız vektörü bu andaki ω açısal hız vektörünün A noktasına göre momentine eşittir.**

Çembersel Hareket

Hız ifadesinin zamana göre türevini alarak,

A noktasının ivme vektörü:

$$\mathbf{a} = \frac{d\omega}{dt} \times OA + \omega \times \frac{dOA}{dt}$$

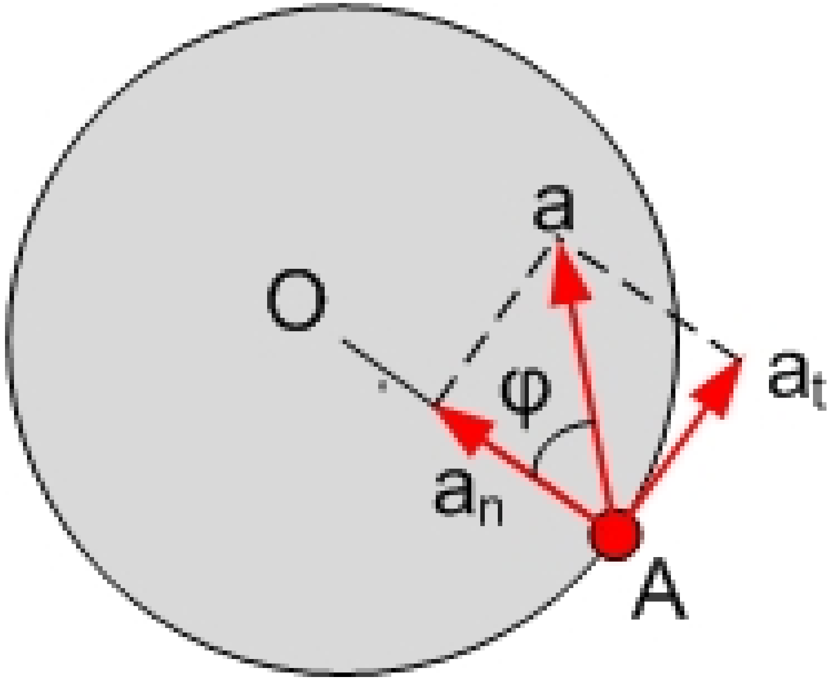
$$\mathbf{a} = \alpha \times OA + \omega \times \mathbf{v}$$

$$\mathbf{a} = \alpha \times \mathbf{OA} - \omega^2 \times \mathbf{OA}$$

$$\mathbf{a}_t = \alpha \times OA, \qquad \mathbf{a}_t = r\alpha$$

$$\mathbf{a}_n = -\omega^2 OA, \qquad \mathbf{a}_n = r\omega^2$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(r\alpha)^2 + (r\omega^2)^2} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

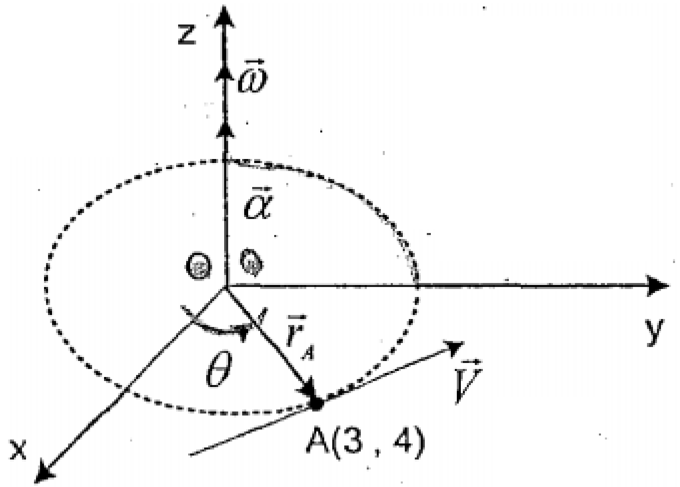


İlk terim teğetsel ivme olup, α'nın A'ya göre momentine eşittir. A noktasında OA diktir.
İkinci terim normal ivme olup, AO yönünde merkeze doğrudur.

$$tan\varphi = \frac{r\alpha}{r\omega^2} = \frac{\alpha}{\omega^2}$$

Örnek Problem

Bir A maddesel noktası şekildeki 5 cm yarıçaplı çemberi çizerken , bir t anında açısal hızı 20 rad/sn , açısal ivmesi 12 rad/sn^2 dir . Şekilde verilen eksenlere göre A noktasının absisinin 3 olduğu anda hız ve ivme vektörünü Oxyz eksenlerinin birim vektörleri cinsinden belirleyiniz ve modüllerini bulunuz



A noktasının yer vektörü ;

$$\vec{r}_A = 3\vec{i} + 4\vec{j}$$

bu andaki açısal hız vektörü ;

$$\vec{\omega} = 20\vec{k}$$

A noktasının hız vektörü ve modülü ;

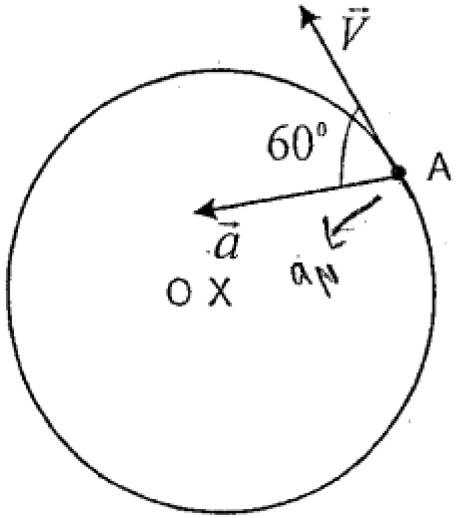
$$\vec{V}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A \Rightarrow \vec{V}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 20 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -80\vec{i} + 60\vec{j} \Rightarrow \left| \vec{V}_A \right| = 100 cm/sn$$

A noktasının ivme vektörü ve modülü

$$\vec{a}_A = \vec{\alpha} \times \overline{r_A} - \omega^2 \cdot \overline{r_A} \Rightarrow \vec{a}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 12 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} - 400(3\vec{i} + 4\vec{j})$$

$$\vec{a}_A = -1248\vec{i} - 1636\vec{j} \Rightarrow \left| \vec{a}_A \right| = 2057.66 cm/sn^2$$

Örnek Problem 2. R = 20 cm yarıçaplı bir rotor ekseni etrafında dönerken çevresindeki bir A noktasının t anında ivmesi , hız doğrultusu ile 60^0 lik açı yaparak , 120 cm/sn^2 dir . Bu anda açısal hızını ve açısal ivmesini hesaplayını) .



Şekilden , ivmenin teğet ve normal bileşeni

$$a_T = a\cos 60 = 120\frac{1}{2} = 60cm/sn^2$$

$$a_N = a\sin 60 = 120\frac{\sqrt{3}}{2} = 60\sqrt{3}cm/sn^2$$

Doğal koordinatlarla ivme vektörü ;

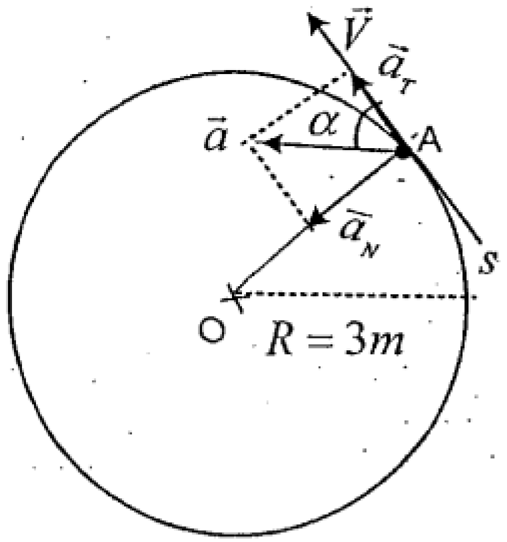
$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N} = R\alpha\vec{T} + R\omega^2\vec{N}$$

dir . Buradan ;

$$60 = 20\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{60}{20} = 3rad/sn^2$$

Örnek Problem

3. Bir maddesel nokta R=3m yarıçaplı bir çember üzerinde hareket ederken maddesel noktaya ait yarıçapın , sabit bir yarıçapla yaptığı θ açısı $\theta_{rad} = 6t^2 + 4t$ fonksiyonuyla değişmektedir . t = 2 . saniyede maddesel noktanın hız ve ivme vektörlerini , teğet ve normal birim vektörleri cinsinden yazınız ve bu anda hız ile ivmenin yaptığı açıyı hesaplayınız (Şekil 3.18.) .



Bu andaki açısal hız ve açısal ivme ;

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 12t + 4 \Rightarrow \omega = 28 rad/sn$$

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = 12 \Rightarrow \alpha = 12 rad/sn^2$$

Hız vektörü ;

$$\vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{T} = R\frac{d\theta}{dt}\vec{T} = R\omega\vec{T} = 3\times 28\vec{T} \Rightarrow \vec{V} = 84\vec{T}$$

İvme vektörü ;

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N} = R\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{T} + \frac{R^2\omega^2}{R}\vec{N} = R\alpha\vec{T} + R\omega^2\vec{N}$$

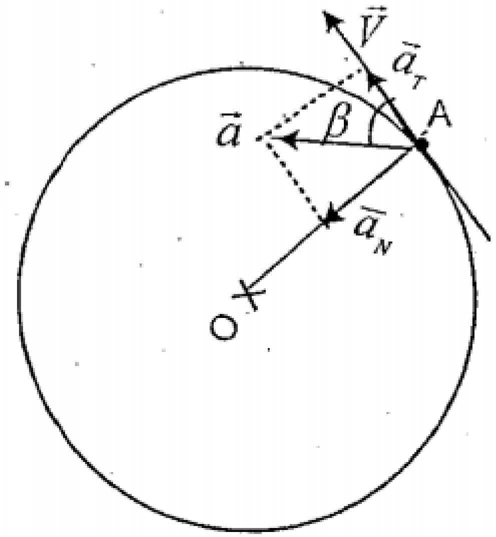
$$\vec{a} = 3\times 12\vec{T} + 3\times(28)^2\vec{N} \Rightarrow \vec{a} = 36\vec{T} + 2352\vec{N}$$

Hız ile ivmenin yaptığı açı ;

$$tg\varphi = \frac{a_N}{a_T} = \frac{2352}{36} \cong 65.3 \Rightarrow \varphi \cong 89^\circ$$

Örnek Problem

4. R yarıçaplı bir çember üzerinde saat ibresinin tersi yönde hareket eden maddesel noktanın t = 0 anında ilk hızı v_0 dır . Bu noktanın ivme vektörü hız vektörü ile sabit β açısı yapmaktadır . t anındaki skaler hızı hesaplayınız



t anında A noktasında ;

$$\cot g\beta = \frac{a_T}{a_N} \quad , \quad \cot g\beta = sabit$$

$$\cot g\beta = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{v^2}{R}} = \frac{dv}{v^2}\cdot\frac{R}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{v^2} = \frac{\cot g\beta dt}{R}$$

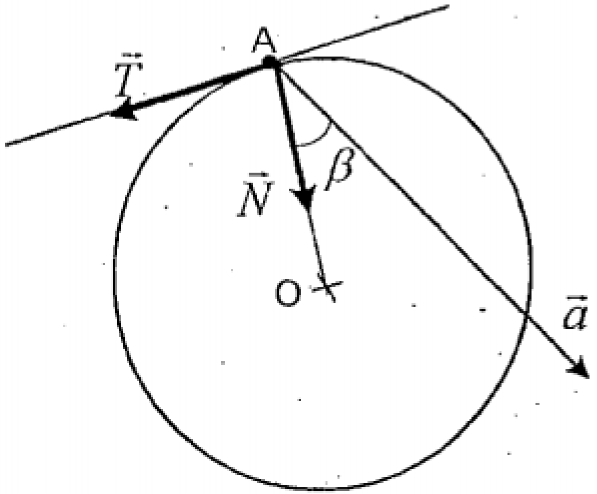
t = 0 dan t ye kadar integralini alalım ;

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2} = \frac{\cot g\beta}{R}\int_0^t dt \Rightarrow \left|-\frac{1}{v}\right|_{v_0}^{v} = \frac{\cot g\beta}{R}\left| t \right|_0^t \Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} - \frac{\cot g\beta\cdot t}{R}$$

$$v = \frac{Rv_0}{R - v_0 t\cot g\beta}$$

Örnek Problem

5. Bir A noktası yarıçapı 8 cm olan bir çember üzerinde saat ibresinin tersi yönde hareket etmektedir . Bir t anında ivme vektörü şekilde verildiği gibidir .
(a) A noktası çemberde t anında hızlanarak mı , yavaşlayarak mı hareket etmektedir ?
(b) Bu anda A noktasının skaler hızını , açısal hızını , açısal ivmesini hesaplayınız . $|\vec{a}| = 56 m/sn^2$, $\beta = 30^0$ dir (Şekil 3.20.) .



(a) Teğet birim vektörü hareket yönünde olursa şekilden ;

$$\vec{a}_T = -5600 \sin 30 \vec{T} = -2800 \vec{T}$$

teğetsel ivmenin cebirsel ölçüsü negatiftir , hareket bu anda yavaşlamaktadır .

(b) $\vec{a}_T = \alpha\, r \vec{T} \Rightarrow \dot{\omega} = \alpha = -\dfrac{2800}{8} = -350 rad/sn^2$

şekilden ;

$$\vec{a}_N = 5600 \cos 30\, \vec{N} = 2800\sqrt{3}\, \vec{N} \text{ dir .}$$

formülden ;

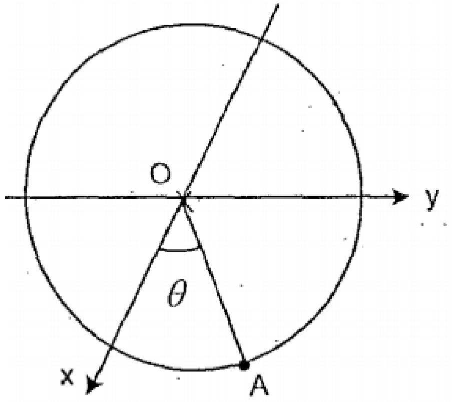
$$\vec{a}_N = \frac{v^2}{r} \vec{N} \Rightarrow \frac{v^2}{8} = 2800\sqrt{3} \Rightarrow v = 196.97 cm/sn$$

$$v = \omega\, r \Rightarrow \omega = \frac{196.97}{8} = 24.62 rad/sn \text{ bulunur .}$$

6. R = 10m yarıçaplı bir çember üzerinde bir maddesel nokta

$$\theta_{rad} = \frac{\pi}{24}(t^2 + 2t)$$

bağıntısı ile hareket ediyor . t = 2.sn de hız ve ivme vektörlerini $\vec{i}$ *ve* $\vec{j}$ birim vektörleri cinsinden yazınız



$$\theta = \frac{\pi}{24}(t^2 + 2t) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{24}(4+4) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

$$\overline{OA} = 10\cos 60\vec{i} + 10\sin 60\vec{j} \Rightarrow \overline{OA} = 5\vec{i} + 5\sqrt{3}\vec{j}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{24}(2t+2) \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{24}(2\times 2 + 2) = \frac{\pi}{24}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\pi}{24}\times 2 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12}$$

$$\vec{\omega} = \frac{\pi}{4}\vec{k}$$

$$\vec{V} = \vec{\omega}\times\overline{OA} \Rightarrow \vec{V} = (\frac{\pi}{4}\vec{k})\times(5\vec{i} + 5\sqrt{3}\vec{j}) = \frac{5\pi}{4}\vec{j} - \frac{5\pi\sqrt{3}}{4}\vec{i}$$

$$\vec{V} = \frac{5\pi}{4}(-\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}) \Rightarrow \vec{V} = 6.8\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha}\times\overline{OA} + \vec{\omega}\times\vec{V} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\pi}{12}\vec{k}\times(5\vec{i} + 5\sqrt{3}\vec{j}) + \frac{\pi}{4}\vec{k}\times\frac{5\pi}{4}(-\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{a} = -5.42\vec{i} - 5.04\vec{j}$$

Örnek Problem

- Bir maddesel nokta R =12 . cm yarıçaplı çember üzerinde saat akrebinin tersi yönünde hareket ederken bir t anında açısal hızı ω = 6 rad s ve açısal ivmesi α = 2 rad s^2 olduğuna göre bu an için hız ve ivme vektörlerini doğal koordinat sisteminde bulunuz.

Çözüm:

$$\vec{V} = R\omega\vec{T}$$

Şeklindeki çembersel hareketteki hız vektörünün doğal koordinat sistemindeki formülünde verilenler yerine konursa

$$\vec{V} = 12 * 6\,\vec{T} \quad , \quad \boxed{\vec{V} = 72\,\vec{T}}$$

hız vektörünün doğal koordinat sistemindeki ifadesi elde edilir.
Aynı şekilde ivme vektörünün doğal koordinat sistemindeki formülü olan

$$\vec{a} = R\alpha\,\vec{T} + R\omega^2\,\vec{N}$$

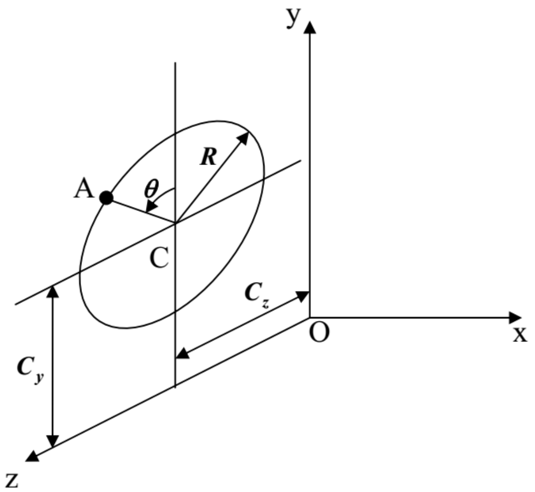
denkleminde verilenler yerine konursa

$$\vec{a} = 12 * 2\,\vec{T} + 12 * 6^2\,\vec{N} \quad , \quad \boxed{\vec{a} = 24\,\vec{T} + 432\vec{N}}$$

ivme vektörünün doğal koordinat sistemindeki ifadesi bulunur.

Örnek Problem

Bir maddesel nokta r =14 cm yarıçaplı bir çember üzerinde θ = πt³/24 radyan bağıntısına uygun olarak hareket etmektedir. Çember şekilde gösterildiği gibi yz düzlemindedir. θ açısı da şekilde gösterildiği gibi alınıyor. t = 2 s için maddesel noktanın yer hız ve ivme vektörlerini kartezyen koordinatlarda hesaplayınız.



Burada $R = 14cm.$ $C_y = 20cm.$ $C_z = 18cm.$ $\theta = \frac{\pi}{24}t^3$ dır.

Çözüm:

$\vec{r} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{OC} = 20\vec{j} + 18\vec{k}$, $\overrightarrow{CA} = RCos\theta\,\vec{j} + RSin\theta\,\vec{k}$

$t = 2$ de $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\overrightarrow{CA} = 7\vec{j} + 7\sqrt{3}\vec{k}$, $\vec{r} = 27\vec{j} + (18 + 7\sqrt{3})\vec{k}$

$\boxed{\vec{r} = 27\vec{j} + 30{,}12\vec{k}}$

Hız vektörü kartezyen koordinatlarda

$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CA}$

formülü ile hesaplanabilir.Burada $\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\vec{i}$ (Çünkü x ekseni çember düzlemine diktir ve maddesel nokta çember etrafında y den z ye doğru dönüyor.)

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{8}t^2$

$t = 2$ için $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{2}$ değeri $\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CA}$ denkleminde yerine yazılırsa

$\vec{V} = \frac{\pi}{2}\vec{i} \wedge (7\vec{j} + 7\sqrt{3})\vec{k}$, $\vec{V} = -\frac{7}{2}\sqrt{3}\pi\vec{j} + \frac{7}{2}\pi\vec{k}$, $\boxed{\vec{V} = -19\vec{j} + 11\vec{k}}$

$t = 2$ deki hız ifadesi hesaplanmış olur.

İvme vektörü kartezyen koordinatlarda

$\vec{a} = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{CA} - \omega^2\overrightarrow{CA}$

formülü ile hesaplanabilir.Burada $\vec{\alpha} = \frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{i}$ (Çünkü açısal ivme vektörü doğrultu değiştirmiyor.)

$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\pi}{4}t$

$t = 2$ için $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\pi}{2}$ değeri ve diğer elde edilenlerle birlikte

$\vec{a} = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{CA} - \omega^2\overrightarrow{CA}$ denklemine gidilirse

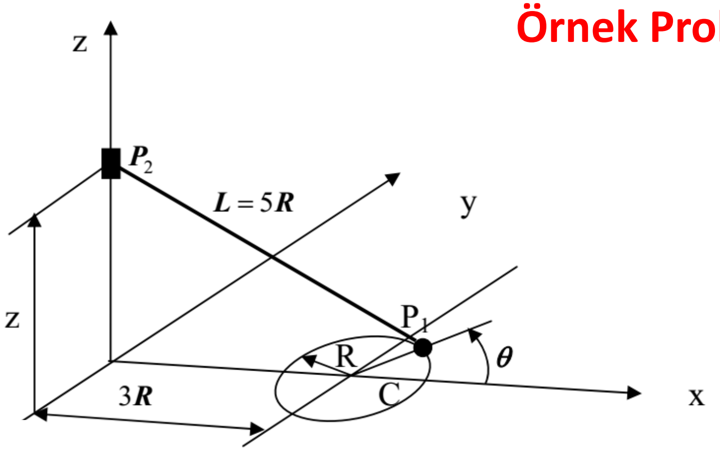
$\vec{a} = \frac{\pi}{2}\vec{i} \wedge (7\vec{j} + 7\sqrt{3}\vec{k}) - \frac{\pi^2}{4}(7\vec{j} + 7\sqrt{3}\vec{k})$

$\vec{a} = -\frac{\pi}{4}(7\pi + 14\sqrt{3})\vec{j} + \frac{\pi}{4}(14 - 7\sqrt{3}\,\pi)\vec{k}$

$\boxed{\vec{a} = -36{,}3\vec{j} - 18{,}9\vec{k}}$

Örnek Problem

Şekilde gösterildiği gibi P_1 maddesel noktası xy düzleminde bulunan ve merkezi x ekseninde olan R cm = 8 yarıçaplı bir çember üzerinde $\theta = \pi t/6$ radyan bağıntısına göre hareket etmektedir. P_2 maddesel noktası ise $P_1P_2 = L = 5R$ sabit olmak üzere z ekseni üzerinde hareket ediyor. t = 1s için P_2 maddesel noktasının hız ve ivmesini bulunuz.



Çözüm:

$$\vec{r}_{P_2} = z\vec{k} \quad , \quad \vec{V}_{P_2} = \dot{z}\vec{k} \quad , \quad \vec{a}_{P_2} = \ddot{z}\vec{k} \quad , \quad \left|\vec{r}_{P_2/P_1}\right| = L = 5R$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}t \quad , \quad \dot{\theta} = \frac{\pi}{6} \quad , \quad \ddot{\theta} = 0$$

$$\vec{r}_{P_2/P_1} = \vec{r}_{P_2} - \vec{r}_{P_1}$$

$$t = 1 \text{ de } \quad \theta = \frac{\pi}{6} Rad.$$

$$\vec{r}_{P_1} = (3R + RCos\theta)\vec{i} + RSin\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{r}_{P_2/P_1} = -(3R + RCos\theta)\vec{i} - RSin\theta\,\vec{j} + z\vec{k}$$

$$L^2 = \left|\vec{r}_{P_2-P_1}\right|^2 = 25R^2 = 9R^2 + R^2Cos^2\theta + 6R^2Cos\theta + R^2Sin^2\theta + z^2$$

$$z^2 = 15R^2 - 6R^2Cos\theta \quad \Rightarrow \quad z = R\sqrt{15 - 6Cos\theta} \quad , \quad z = R(15 - 6Cos\theta)^{1/2}$$

$$\dot{z} = -\frac{1}{2}R(15 - 6Cos\theta)^{-1/2}(-6Sin\theta)\dot{\theta}$$

$$\dot{z} = 3R\dot{\theta}Sin\theta(15 - 6Cos\theta)^{-1/2}, \quad \dot{z} = \frac{3R\dot{\theta}Sin\theta}{\sqrt{15 - 6Cos\theta}}$$

$$\ddot{z} = 3R\ddot{\theta}Sin\theta(15 - 6Cos\theta)^{-1/2} + 3R\dot{\theta}^2Cos\theta(15 - 6Cos\theta)^{-1/2} + 3R\dot{\theta}Sin\theta(-\frac{3}{2})(15 - 6Cos\theta)^{-3/2}(6Sin\theta)\dot{\theta}$$

$$\ddot{z} = \frac{3R(\ddot{\theta}Sin\theta + \dot{\theta}^2Cos\theta)}{\sqrt{15 - 6Cos\theta}} - \frac{27R\dot{\theta}^2Sin^2\theta}{(15 - 6Cos\theta)\sqrt{15 - 6Cos\theta}}$$

$$\dot{z} = \frac{3R\frac{\pi}{6}Sin\frac{\pi}{6}}{\sqrt{15 - 6Cos\frac{\pi}{6}}}$$

$$\dot{z} = \frac{2\pi}{\sqrt{15 - 3\sqrt{3}}} \qquad \dot{z} = 2\,cm/s. \qquad \boxed{\vec{V}_{P_2} = 2\vec{k}}$$

$$\ddot{z} = \frac{3R(\frac{\pi^2}{36}Cos\frac{\pi}{6})}{\sqrt{15 - 6Cos\frac{\pi}{6}}} - \frac{27R\frac{\pi^2}{36}Sin^2\frac{\pi}{6}}{(15 - 6Cos\frac{\pi}{6})\sqrt{15 - 6Cos\frac{\pi}{6}}}$$

$$\ddot{z} = \frac{\pi^2\sqrt{3}}{3\sqrt{15 - 3\sqrt{3}}} - \frac{3\pi^2}{2(15 - 3\sqrt{3})\sqrt{15 - 3\sqrt{3}}}$$

$$\ddot{z} = 1{,}34\,cm/s^2 \qquad \boxed{\vec{a}_{P_2} = 1{,}34\vec{k}}$$

Ders Kitabı:

- Hibbeler, 2014. Mühendislik Mekaniği – Dinamik, Literatür Yayıncılık, İstanbul

  Çevirenler: Ayşe Soyuçok, Özgün Soyuçok,

  Orijinal isimi: Engineering Mechanics SI Metric Edition, Dynamics.

Kullanılan Kaynaklar:

- Ferdinand Beer, Phillip Cornwell, E. Russell Johnston 2014. Mühendisler için Vektör Mekaniği Dinamik Literatür Yayıncılık, İstanbul, Çevirmen: Osman Kopmaz, Ömer Gündoğdu.

  Orijinal isimi: Vector Mechanics for Engineers: Dynamics

- Hibbeler, R. C., 2015. Engineering Mechanics: Dynamics, 14th Edition, Prentice Hall, New Jersey USA.

- Meriam, J. L. , Kraige, L. G. 2012. Engineering Mechanics: Dynamics, John Wiley & Sons, USA