

# DİNAMİK - 6



**Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali Dayıođlu**  
**Ankara Üniversitesi Ziraat Fakültesi**  
**Tarım Makinaları ve Teknolojileri Mühendisliđi Bölümü**

# 6. HAFTA

## **Kapsam:**

- Bağımlı hareket,
- Analiz prosedürü,
- Örnek problem çözümleri,
- Bağıl hareket,
- Analiz prosedürü,
- Mutlak konum, bağıl konum kavramları
- Mutlak hız, bağıl hız kavramları
- Mutlak ivme, bağıl ivme kavramları
- Bağıl harekette vektörel işlemler

Parçacık Kinematiği: **Bağımlı Hareket**

# 1.9. Bağımlı Hareket

Birden fazla parçacık birbiri ile bağlantılı hareket eder. Burada parçacıklar arasında hareketin kısıtlanması söz konusudur. Bu tip hareketlere bağımlı hareket denir. Kısalmayan ip, kablo ve çubuklarla birbirine bağlanmış iki yada daha çok maddesel nokta birlikte **bağımlı** olarak hareket eder.

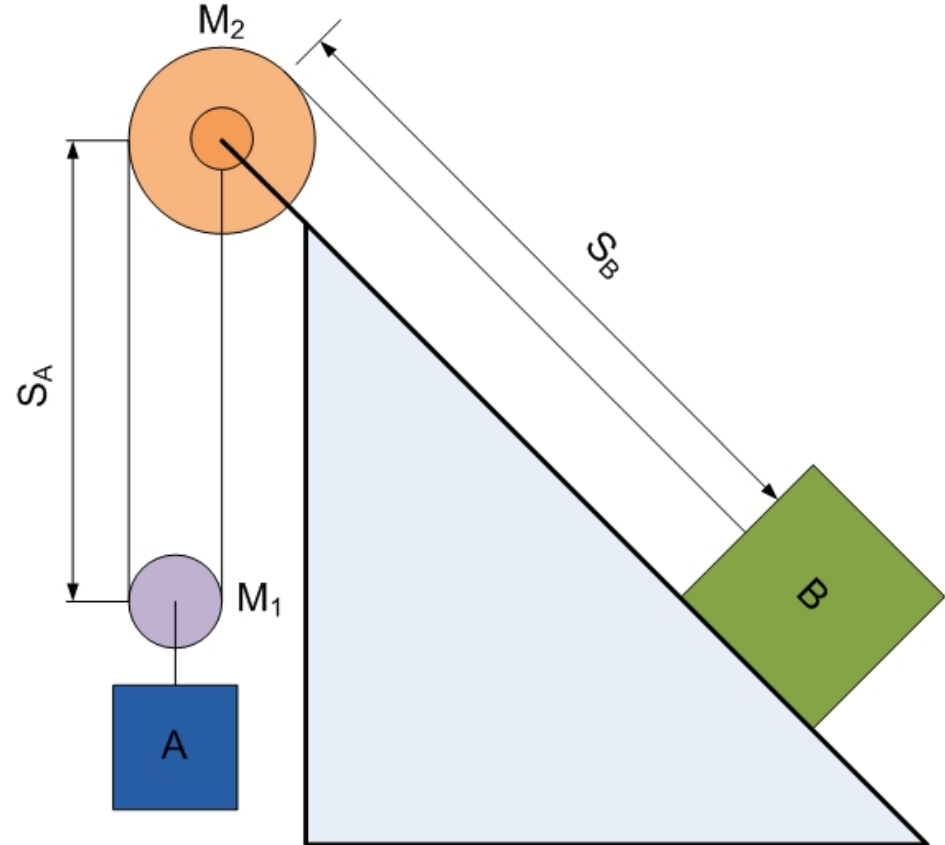
Örnek olarak şekildeki makara sisteminde A ve B cisimleri makara ipi nedeniyle birbirleriyle bağımlı hareket koşulunu sağlar. Bu nedenle ip uzunluğu sabittir.

$$2S_A + S_B = \text{sabit}$$

Maddesel noktanın birinin yeri biliniyorsa, diğerinin yeri belirlenebilir.

$$\text{Hız: } 2V_A + V_B = 0$$

$$\text{İvme: } 2a_A + a_B = 0$$



## 1.9. Bağımlı Hareket

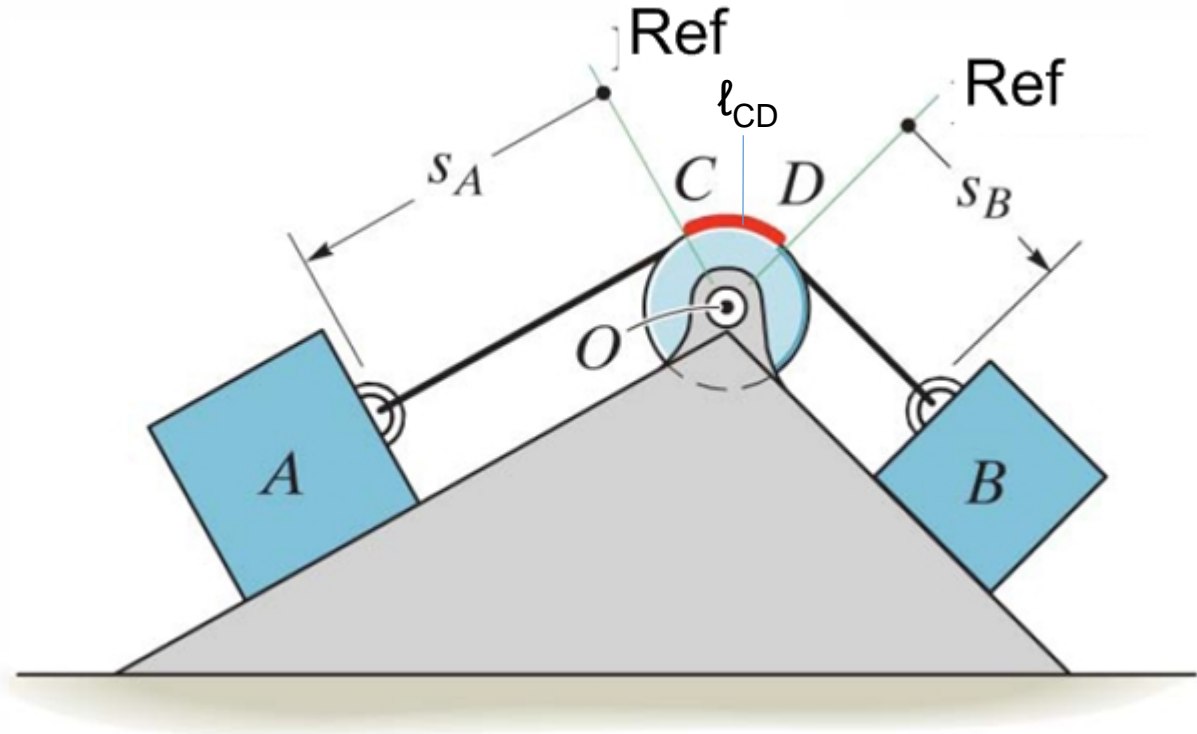
$$s_A + l_{CD} + s_B = l_T$$

$l_{CD}$  : makara üzerinde CD yayı  
üzerindeki halat uzunluğu  
 $l_T$  : toplam halat uzunluğu

HIZ:

$$\frac{ds_A}{dt} + \frac{ds_B}{dt} = 0 \quad \text{or} \quad v_B = -v_A$$

İVME:  $a_B = -a_A$

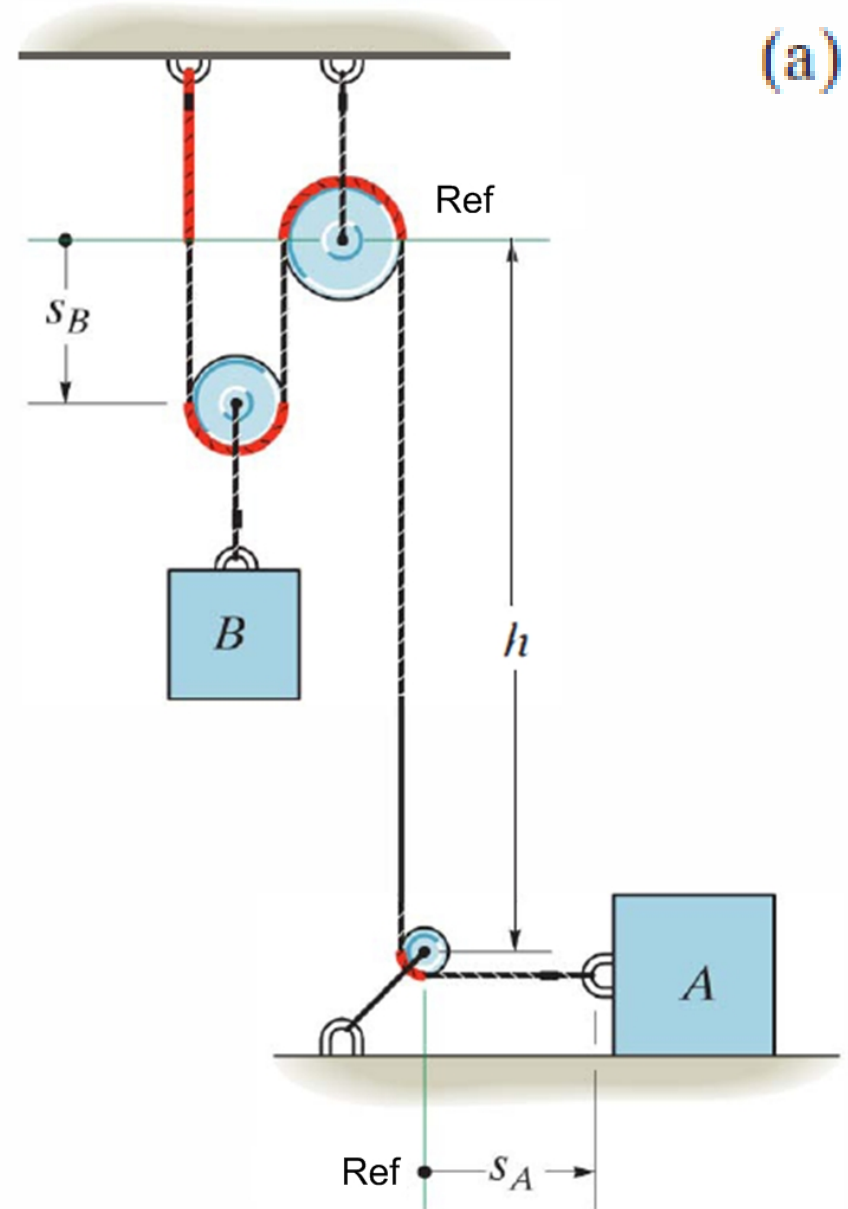


## 1.9. Bağımlı Hareket

$$2s_B + h + s_A = l$$

$$2v_B = -v_A \quad 2a_B = -a_A$$

B kütlesi aşağı yönde hareket ederken ( $+s_B$ ), A kütlesi sola doğru ( $-s_A$ ) iki katı kadar eder.



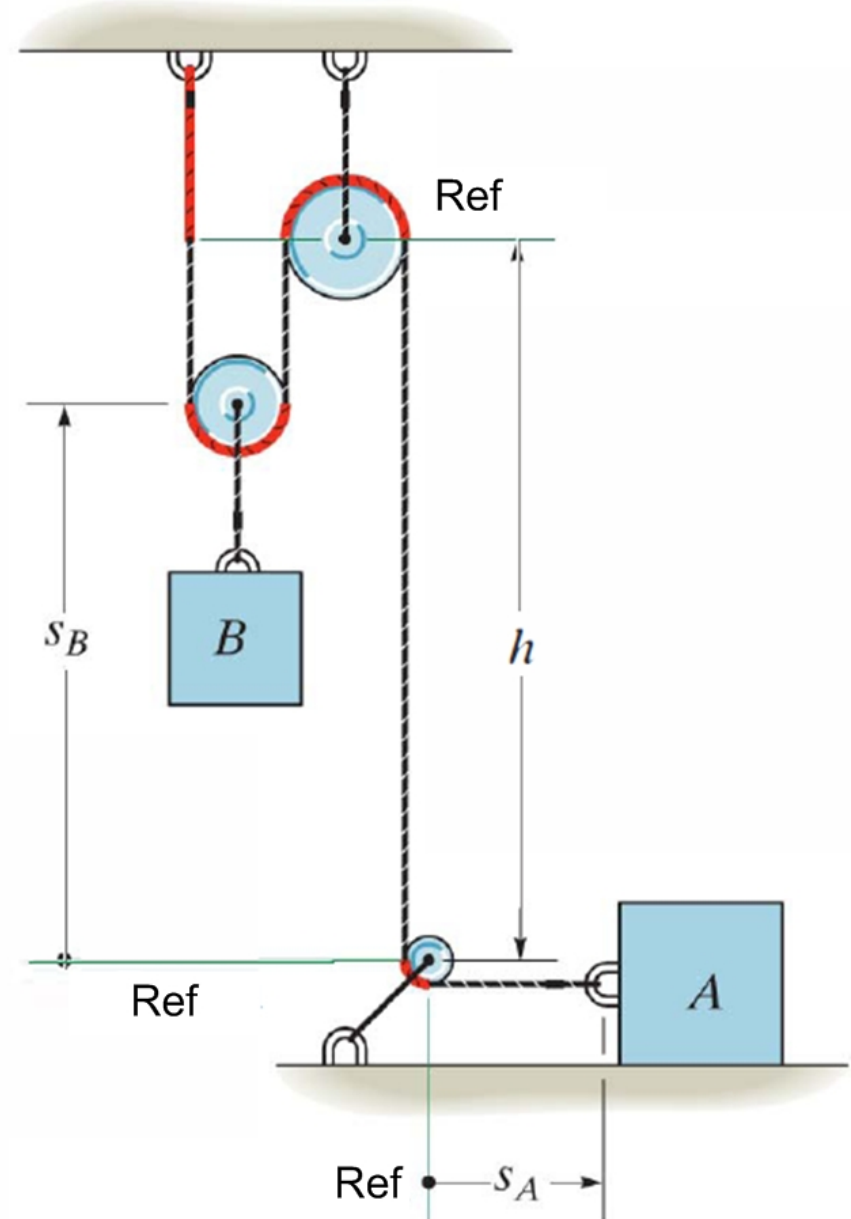
## 1.9. Bağımlı Hareket

$$2(h - s_B) + h + s_A = l$$

$$2v_B = v_A \quad 2a_B = a_A$$

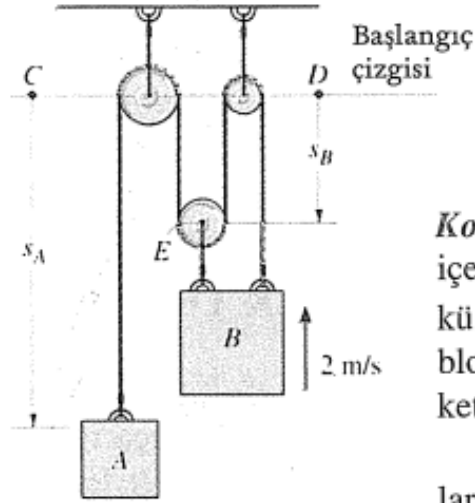
Burada işaretler aynı!

Neden ?



## Örnek Problem

Şekildeki  $B$  bloğu yukarıya doğru sabit  $2 \text{ m/s}$  hızına sahip olduğuna göre,  $A$  bloğunun hızını belirleyiniz.



**Konum-Koordinat Denklemi.** Bu sistemde, uzunluğu değişen parçalar içeren *tek bir ip* vardır.  $s_A$  ve  $s_B$  konum koordinatları kullanılacaktır, çünkü bunların her biri, sabit bir noktadan ( $C$  veya  $D$ ) ölçülmekte ve her bir bloğun *hareket çizgisi* boyunca uzanmaktadır. Özellikle,  $B$  ve  $E$ 'nin hareketi *aynı* olduğundan,  $s_B$   $E$  noktasına yönelmiştir.

Şekil 12–38'deki ipin renkli parçaları sabit uzunluğa sahiptir ve bloklar hareket ederken göz önüne alınmaz. İpin geri kalan  $l$  uzunluğu da sabittir ve

$$s_A + 3s_B = l$$

denklemi ile, değişen  $s_A$  ve  $s_B$  konum koordinatlarına bağlıdır.

**Zamana Göre Türev.** Zamana göre türev

$$v_A + 3v_B = 0$$

sonucunu verir, dolayısıyla  $v_B = -2 \text{ m/s}$  (yukarıya doğru) olduğu zaman

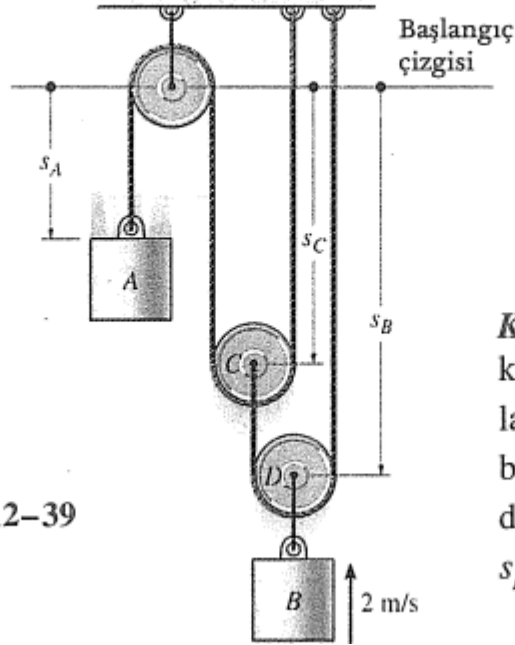
$$v_A = 6 \text{ m/s} \downarrow$$

**Yanıt**



## Örnek Problem

Şekildeki  $B$  bloğu yukarıya doğru sabit  $2 \text{ m/s}$  hızına sahip olduğuna göre,  $A$  bloğunun hızını belirleyiniz.



Şekil 12-39

**Konum-Koordinat Denklemi.** Şekilde gösterildiği gibi,  $A$  ve  $B$  bloklarının konumları  $s_A$  ve  $s_B$  koordinatları kullanılarak tanımlanır. Sistem, uzunlukları değişen iki ipe sahip olduğundan,  $s_A$  ve  $s_A$  arasında bir bağıntı kurabilmek için üçüncü bir koordinat,  $s_C$ , kullanmak gerekecektir. Diğer bir deyişle, iplerden birinin uzunluğu  $s_A$  ve  $s_C$  cinsinden, diğerinin uzunluğu  $s_B$  ve  $s_C$  cinsinden ifade edilebilir.

Şekil 12-39'daki ipin renkli parçaları analizde dikkate alınmayacaktır. Niçin?  $l_1$  ve  $l_2$  ile göstereceğimiz, geri kalan ip parçaları için

$$s_A + 2s_C = l_1 \quad s_B + (s_B - s_C) = l_2$$

yazılabilir.  $s_C$ 'nin yok edilmesi her iki bloğun konumlarını tanımlayan bir denklem, yani

$$s_A + 4s_B = 2l_2 + l_1$$

denklemini verir.

**Zamana Göre Türev.** Zamana göre türev

$$v_A + 4v_B = 0$$

sonucunu verir, dolayısıyla  $v_B = -2 \text{ m/s}$  (yukarıya doğru) olduğu zaman

$$v_A = + 8 \text{ m/s} = 8 \text{ m/s} \downarrow$$

**Yanıt**

## ÖRNEK

Verilen: Soldaki şekilde görüldüğü gibi, A noktasındaki kablo ucu aşağı doğru 2 m/s hız ile çekilmektedir.

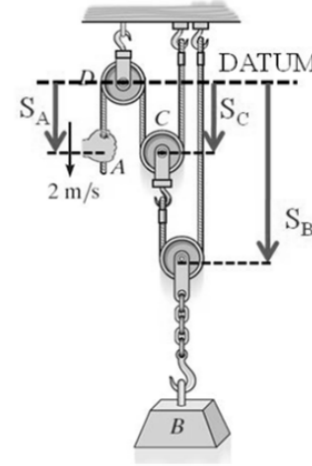
İstenen: B bloğunun hızı.

Plan:

Bu örnekteki hareket iki kablo içermektedir. Bu durumda iki adet konum denklemi olacaktır (her kablo için bir adet). Bu iki denklemi yaz, bunları birleştir ve türevini al.

Çözüm:

1) Konum vektörlerini sabit bir referans çizgiye göre tanımla. Üç adet koordinat tanımlanmalıdır: biri A noktası için ( $s_A$ ), biri B Bloğu için ( $s_B$ ) ve sonuncusu da C bloğu için ( $s_C$ ).



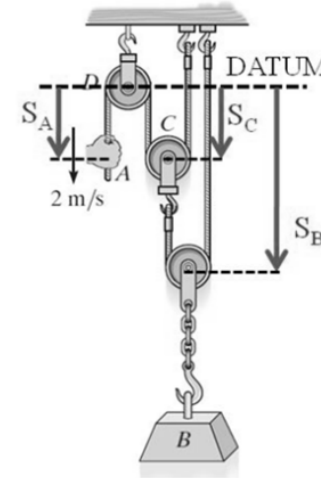
- Referans çizgisini en yukarıdaki makara boyunca tanımla (sabit bir konumu vardır).
- $s_A$ , A noktasına doğru tanımlanabilir.
- $s_B$ , B'nin üzerindeki makaranın merkezine doğru tanımlanabilir.
- $s_C$ , C makarasının merkezine doğru tanımlanabilir.
- Tüm koordinatlar aşağı yönde pozitif ve her noktanın/parçacığın kendi hareketi doğrultusunda tanımlandı.

2) **Her kablo için konum/uzunluk denklemini yaz.** İlk kablonun uzunluğu eksi sabit uzunluktaki parçaların uzunluğunu  $l_1$  olarak tanımla. İkinci kablo için aynı şekilde  $l_2$  uzunluğunu tanımla:

$$\text{Kablo 1: } s_A + 2s_C = l_1$$

$$\text{Kablo 2: } s_B + (s_B - s_C) = l_2$$

3) Her iki denklemden  $s_C$ 'leri sadeleştirerek aşağıdaki ifadeyi bul;  
 $s_A + 4s_B = l_1 + 2l_2$



4) Bu ifadenin **türevini alarak** hızlar arasındaki ilişkiyi bul.

$l_1$  ve  $l_2$  uzunluklarının sabit olduğuna dikkat et!

$$v_A + 4v_B = 0 \Rightarrow v_B = -0.25v_A = -0.25(2) = -0.5 \text{ m/s}$$

B bloğunun hızı yukarı doğru 0.5 m/s olarak bulunur (negatif  $s_B$  yönünde)

## Örnek Problem

Verilen: Bu makara sisteminde, A bloğu 4 m/s sürat ile aşağı yönde, C bloğu ise 2 m/s ile yukarı yönde hareket etmektedir

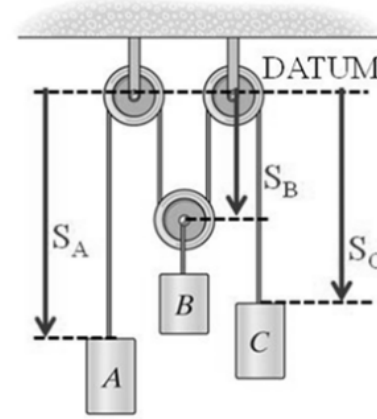
İstenen: B bloğunun sürati.

Plan:

Tüm bloklar tek bir kablo ile birbirine bağlıdır. Dolayısıyla, sadece tek bir konum/uzunluk denklemi yeterli olacaktır. Her blok için konum koordinatını tanımla, konum ilişkilerini yaz ve hız ilişkilerini bulmak için türevini al.

Çözüm:

1) Yukarıdaki sabit makaralar boyunca bir referans çizgi belirlenebilir ve her bir blok için konum koordinatı tanımlanabilir. (veya blokların üzerindeki makaralar için).



2)  $s_A$ ,  $s_B$  ve  $s_C$  şekilde görüldüğü gibi tanımlanarak konum ilişkisi yazılabilir:

$$s_A + 2s_B + s_C = 1$$

3) Hız ilişkisi için türevini al:

$$\begin{aligned} v_A + 2v_B + v_C &= 0 \\ \Rightarrow 4 + 2v_B + (-2) &= 0 \\ \Rightarrow v_B &= -1 \text{ m/s} \end{aligned}$$

B bloğunun hızı 1 m/s yukarı doğrudur (negatif  $s_B$  yönünde).

Parçacık Kinematiği: **Bağıl Hareket**

# 1.10 Bağıl Hareket

Bir cismin başka bir cisme göre konum, hız ve ivme büyüklüklerinin tanımlanmasına bağıl yada göreceli hareket adı verilir.

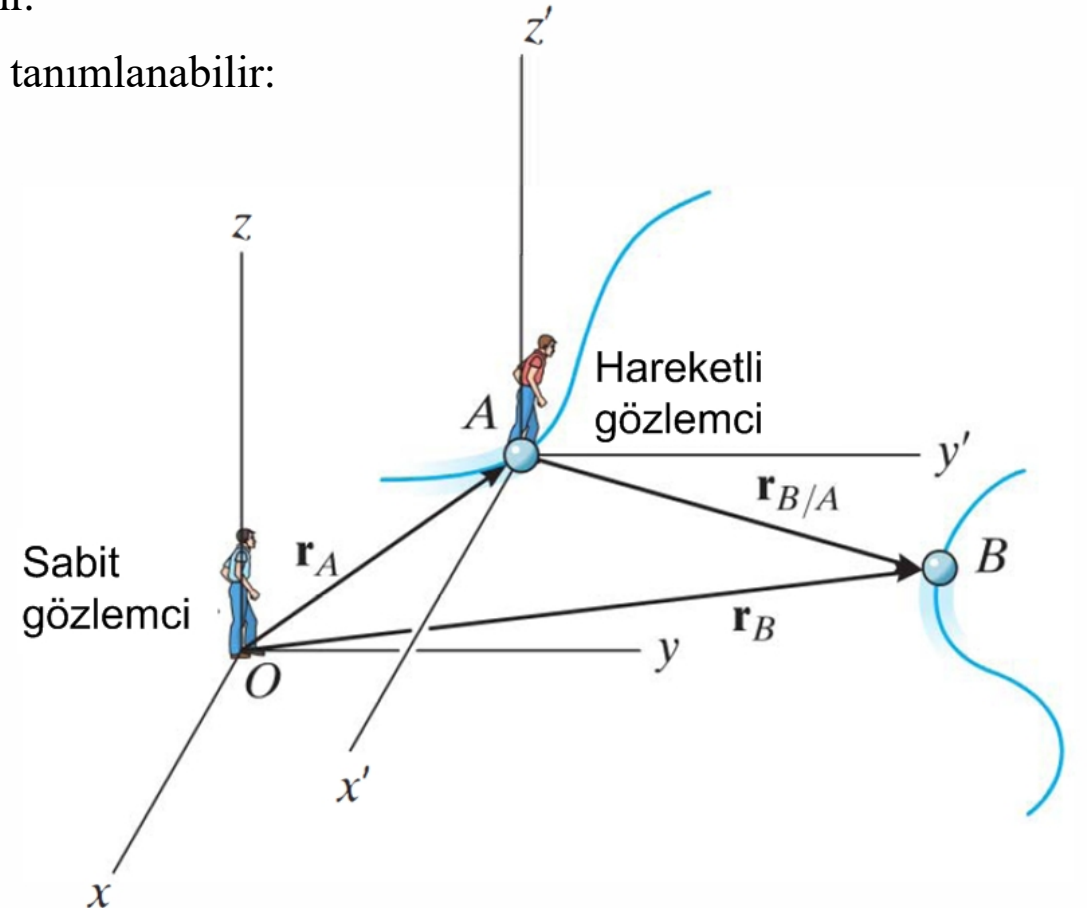
A ve B hareketli parçacıklarını göz önüne alalım. Her parçacığın mutlak konumu ( $\mathbf{r}_B$  ve  $\mathbf{r}_A$ ) sabit koordinat sisteminin O ortak orjinine göre ölçülür. A parçacığı  $x' y' z'$  hareketli koordinat sistemiyle birlikte hareket eder.

B parçacığının A'ya göre konumu bağıl konum vektörüyle ( $\mathbf{r}_{B/A}$ ) gösterilir.

Vektör toplama kuralını kullanarak aşağıdaki vektörel bağıl konum eşitli tanımlanabilir:

Konum vektörü:

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$



## 1.10. Bağlı Hareket

Benzer şekilde A ve B parçacıklarının mutlak ve bağlı hızları arasındaki basit vektörel ilişkiler zamana göre türevler alınarak belirlenebilir.

Hız vektörü:

$$\mathbf{v}_B = d\mathbf{r}_B/dt$$

$$\mathbf{v}_A = d\mathbf{r}_A/dt$$

$$\mathbf{v}_{B/A} = d\mathbf{r}_{B/A}/dt$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

Mutlak ve bağlı ivme vektörleri:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

# 1.10. Bağıl Hareket

Hareket etmekte olan cisimlerin birbirlerine göre konum, hız ve ivme büyüklüklerinin tespit edilmesi bir çok dinamik uygulamalarında önemli olabilmektedir.

Bir cismin başka bir cisme göre konum, hız ve ivme büyüklüklerinin tanımlanmasına bağıl yada göreceli hareket adı verilir.

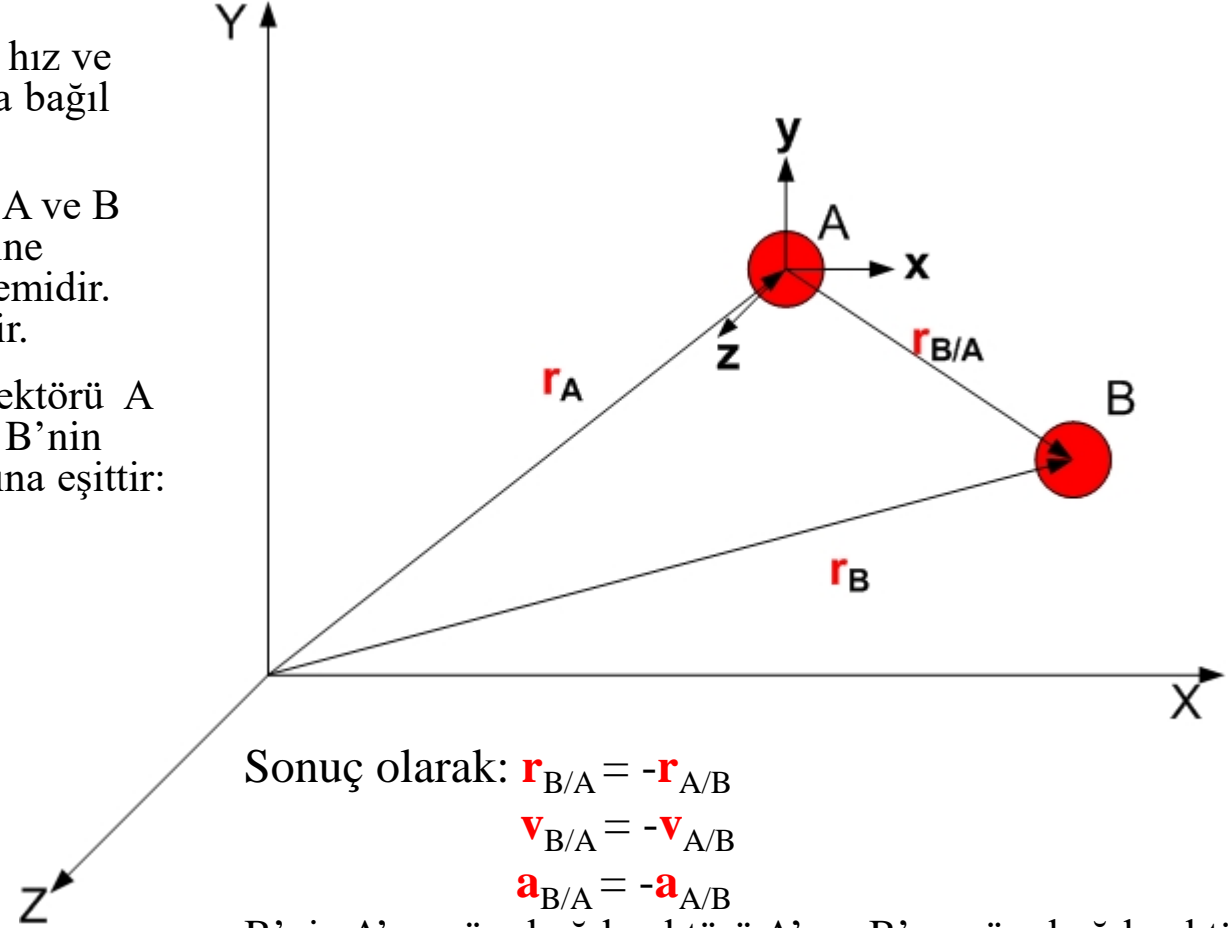
Şekilde XYZ sabit koordinat sistemini, A ve B hareketli cisimleri, xyz A cismi üzerine yerleştirilmiş hareketli koordinat sistemidir. XYZ ve xyz daima birbirine paraleldir.

B maddesel noktasının mutlak konum vektörü A noktasının mutlak konum vektörü ile B'nin A'ya göre konum vektörünün toplamına eşittir:

- $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$
- $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$
- $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$

Hareketli koordinat takımı B üzerine yerleştirilirse:

- $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{A/B}$
- $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$
- $\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B}$



Sonuç olarak:  $\mathbf{r}_{B/A} = -\mathbf{r}_{A/B}$

$$\mathbf{v}_{B/A} = -\mathbf{v}_{A/B}$$

$$\mathbf{a}_{B/A} = -\mathbf{a}_{A/B}$$

B'nin A'ya göre bağıl vektörü A'nın B'ye göre bağıl vektörüyle aynı uzunlukta olup, ters yönlüdür.

# 1.10. Bağıl Hareket

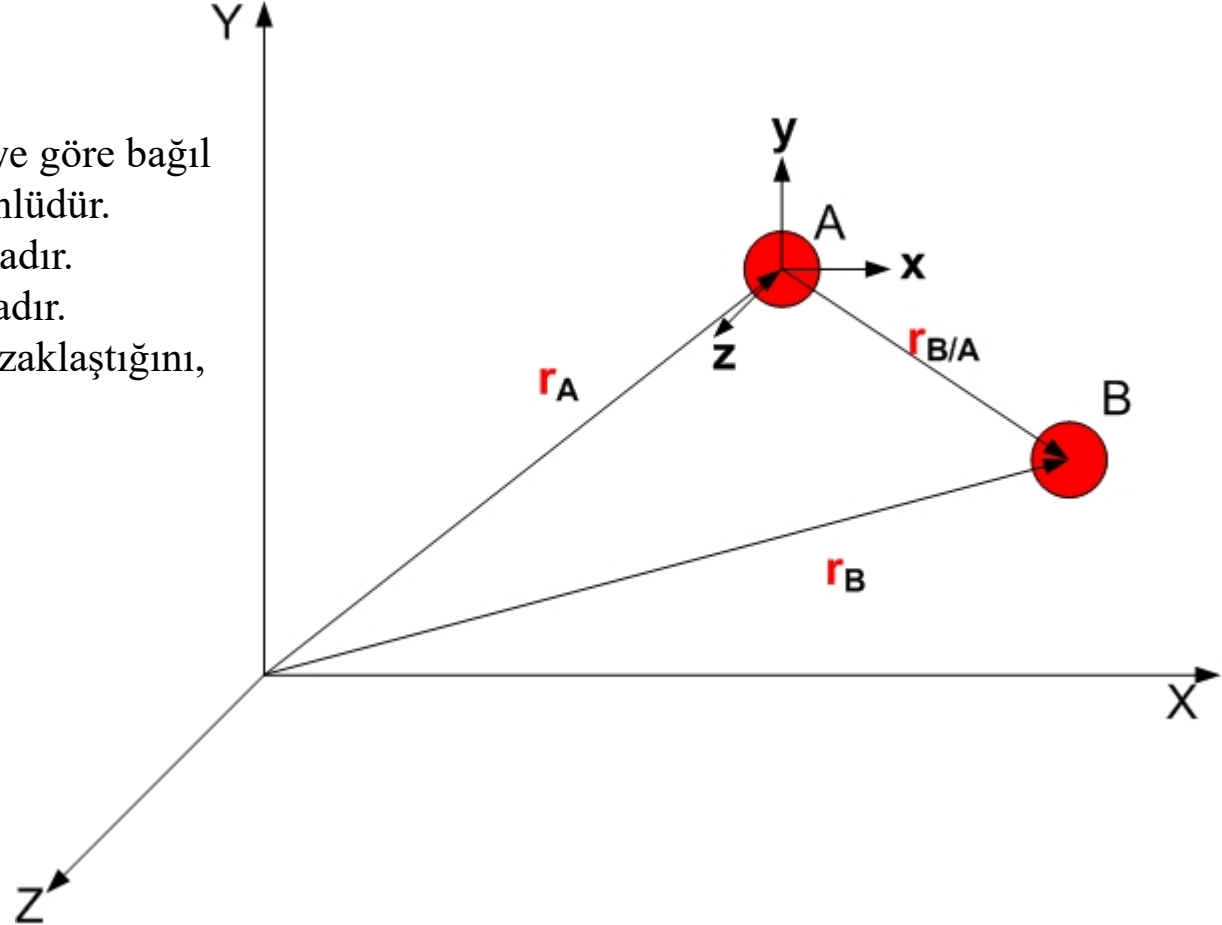
Sonuç olarak:  $\mathbf{r}_{B/A} = -\mathbf{r}_{A/B}$

$$\mathbf{v}_{B/A} = -\mathbf{v}_{A/B}$$

$$\mathbf{a}_{B/A} = -\mathbf{a}_{A/B}$$

B'nin A'ya göre bağıl vektörü A'nın B'ye göre bağıl vektörüyle aynı uzunlukta olup, ters yönlüdür.

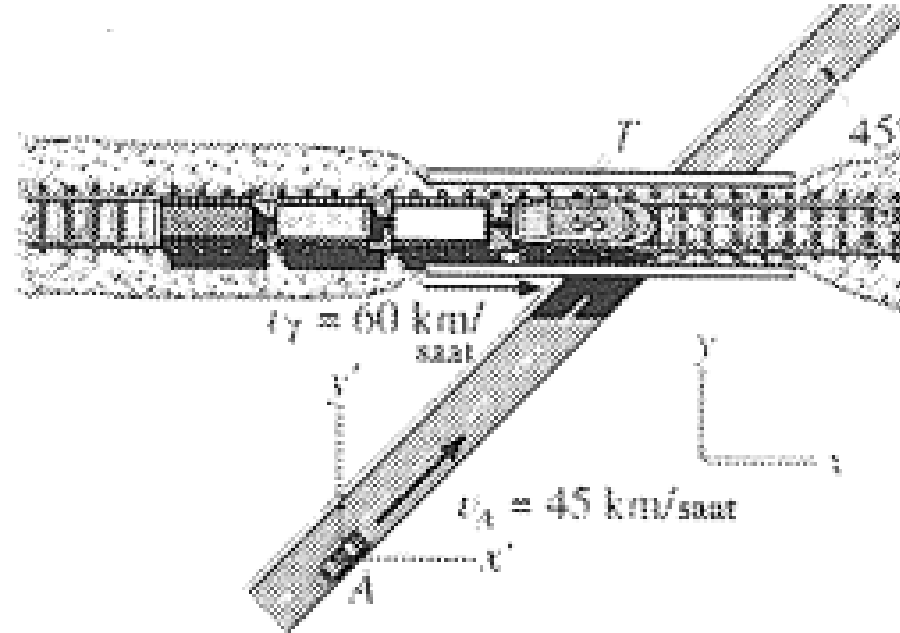
- $\mathbf{r}_{B/A}$  işareti (+) ise B, A'nın sağındadır.
- $\mathbf{r}_{B/A}$  işareti (-) ise B, A'nın solundadır.
- $\mathbf{v}_{B/A}$  işareti (+) ise B'nin , A'dan uzaklaştığını, (-) ise B'nin A'ya yaklaştığını gösterir.





## Örnek Problem

60 km/saat'lik sabit bir hızla giden bir tren Şekil 12-43a'da gösterilen bir yol üzerinden geçiyor. A otomobili 45 km/saat hızla yol boyunca ilerlediğine göre, trenin otomobile göre bağıl hızını belirleyiniz.



## Çözüm

### ÇÖZÜM I

**Vektör Analizi.**  $\mathbf{v}_{T/A}$  bağıl hızı, otomobile yerleştirilen öteleme eksenlerinden ölçülür, Şekil 12–43a ve  $\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A}$  denkleminde belirlenir.  $\mathbf{v}_T$  ve  $\mathbf{v}_A$ 'nın büyüklük ve doğrultularının *her ikisi* de bilindiğinden, bilinmeyenler  $\mathbf{v}_{T/A}$ 'nın bileşenleri olur. Şekil 12–43a'daki  $x, y$  eksenlerini ve kartezyen vektör analizini kullanarak

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_T &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A} \\ 60\mathbf{i} &= (45 \cos 45^\circ \mathbf{i} + 45 \sin 45^\circ \mathbf{j}) + \mathbf{v}_{T/A}\end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_{T/A} = \{28.2\mathbf{i} - 31.8\mathbf{j}\} \text{ km/saat} \quad \text{Yanıt}$$

elde edilir.  $\mathbf{v}_{T/A}$ 'nın büyüklüğü, böylece

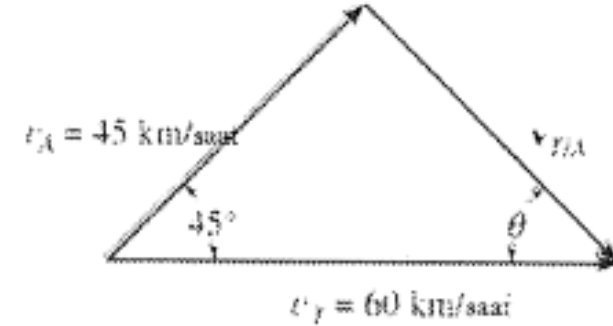
$$v_{T/A} = \sqrt{(28.2)^2 + (-31.8)^2} = 42.5 \text{ km/saat} \quad \text{Yanıt}$$

olur.  $x$  eksenine göre tanımlanan  $\mathbf{v}_{T/A}$ 'nın doğrultusu, her bir bileşenin doğrultusundan

$$\tan \theta = \frac{(v_{T/A})_y}{(v_{T/A})_x} = \frac{31.8}{28.2}$$

$$\theta = 48.4^\circ \quad \text{Yanıt}$$

şeklinde elde edilir. Şekil 12–43b'de gösterilen vektör toplamının,  $\mathbf{v}_{T/A}$  için doğru yön olduğuna dikkat ediniz. Bu şekil, yanıtı tahmin etmemizi sağlar ve doğruluğunu kontrol etmek için kullanılabilir.



## ÇÖZÜM II

**Skaler Analiz.**  $\mathbf{v}_{T/A}$ 'nın bilinmeyen bileşenleri bir skaler analiz uygulanarak da belirlenebilir. Bu bileşenlerin pozitif  $x$  ve  $y$  doğrultularında etki ettiğini varsayacağız. Buna göre,

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A}$$

$$\begin{bmatrix} 60 \text{ km/saat} \\ \rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \text{ km/saat} \\ \nearrow 45^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (v_{T/A})_x \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (v_{T/A})_y \\ \uparrow \end{bmatrix}$$

olur. Her bir vektörün  $x$  ve  $y$  bileşenlerine ayrılmasıyla

$$(\rightarrow) \quad 60 = 45 \cos 45^\circ + (v_{T/A})_x + 0$$

$$(+ \uparrow) \quad 0 = 45 \sin 45^\circ + 0 + (v_{T/A})_y$$

bulunur. Çözümünden, önceki sonuçları buluruz.

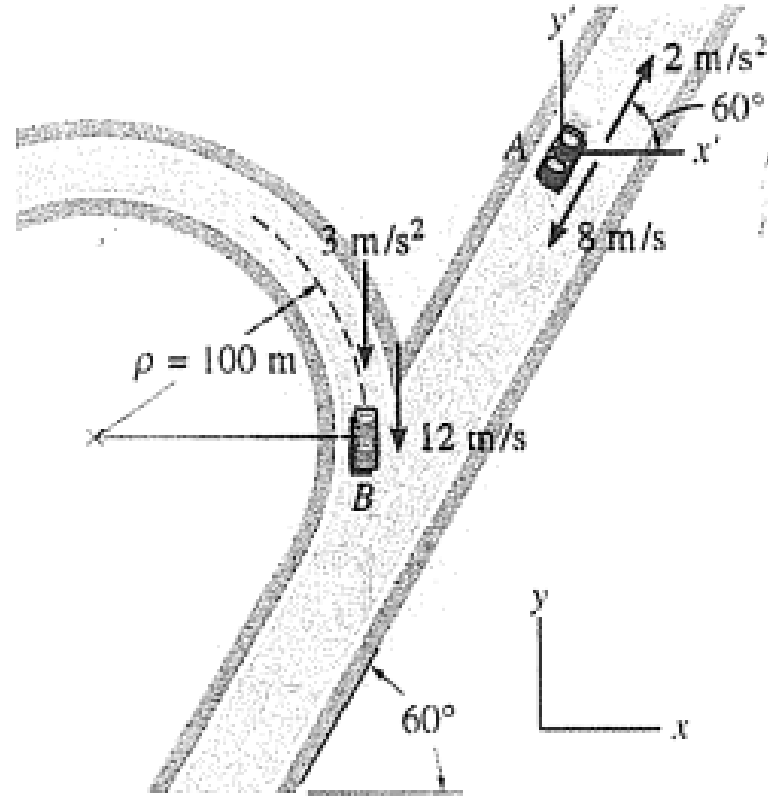
$$(v_{T/A})_x = 28.2 \text{ km/saat} = 28.2 \text{ km/saat} \rightarrow$$

$$(v_{T/A})_y = -31.8 \text{ km/saat} = 31.8 \text{ km/saat} \downarrow$$

**Yanıt**

## Örnek Problem

Şekil 12–45’de gösterilen anda,  $A$  ve  $B$  arabaları, sırasıyla  $8 \text{ m/s}$  ve  $12 \text{ m/s}$  hızlarıyla ilerlemektedir. Ayrıca bu anda,  $A$   $2 \text{ m/s}^2$  ile yavaşlamakta,  $B$   $3 \text{ m/s}^2$  ile hızlanmaktadır.  $B$ ’nin  $A$ ’ya göre hız ve ivmesini belirleyiniz.




**Hız.** Sabit  $x$  ve  $y$  eksenleri yerde bir noktaya yerleştiriliyor ve  $x'$ ,  $y'$  ötele- nen eksenleri  $A$  arabasına yerleştiriliyor, Şekil 12-45. Bağlı hız  $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$  'dan belirlenir. İki bilinmeyen nedir? Kartezyen vektör analizini kulla- narak

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \\ -12\mathbf{j} &= (-8 \cos 60^\circ \mathbf{i} - 8 \sin 60^\circ \mathbf{j}) + \mathbf{v}_{B/A} \\ \mathbf{v}_{B/A} &= \{4\mathbf{i} - 5.072\mathbf{j}\} \text{ m/s}\end{aligned}$$

buluruz. Buna göre,

$$v_{B/A} = \sqrt{(4)^2 + (5.072)^2} = 6.46 \text{ m/s} \quad \text{Yanıt}$$

olur.  $\mathbf{v}_{B/A}$  'nın,  $+\mathbf{i}$  ve  $-\mathbf{j}$  bileşenleri olduğuna dikkat ederek, doğrultusunu

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{(v_{B/A})_y}{(v_{B/A})_x} = \frac{5.072}{4} \\ \theta &= 51.7^\circ\end{aligned}$$


olarak buluruz.

*Yanıt*

**İvme.**  $B$  arabasının ivmesinin hem teğetsel hem normal bileşeni vardır. Niçin? Normal bileşenin büyüklüğü

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(12 \text{ m/s})^2}{100 \text{ m}} = 1.440 \text{ m/s}^2$$

dir. Bağlı ivme ile ilgili denklemin uygulanması

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \\ (-1.440\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) &= (2 \cos 60^\circ \mathbf{i} + 2 \sin 60^\circ \mathbf{j}) + \mathbf{a}_{B/A} \\ \mathbf{a}_{B/A} &= \{-2.440\mathbf{i} - 4.732\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

sonucunu verir. Böylece

$$a_{B/A} = \sqrt{(2.440)^2 + (4.732)^2} = 5.32 \text{ m/s}^2 \quad \text{Yanıt}$$

$$\tan \phi = \frac{(a_{B/A})_y}{(a_{B/A})_x} = \frac{4.732}{2.440}$$

$$\phi = 62.7^\circ$$


*Yanıt*

## **Ders Kitabı:**

- Hibbeler, 2014. Mühendislik Mekaniği – Dinamik, Literatür Yayıncılık, İstanbul  
Çevirenler: Ayşe Soyuçok, Özgün Soyuçok,  
Orijinal isimi: Engineering Mechanics SI Metric Edition, Dynamics.

## **Kullanılan Kaynaklar:**

- Ferdinand Beer, Phillip Cornwell, E. Russell Johnston 2014. Mühendisler için Vektör Mekaniği Dinamik Literatür Yayıncılık, İstanbul, Çevirmen: Osman Kopmaz, Ömer Gündoğdu.  
Orijinal isimi: Vector Mechanics for Engineers: Dynamics
- Hibbeler, R. C., 2015. Engineering Mechanics: Dynamics, 14th Edition, Prentice Hall, New Jersey USA.
- Meriam, J. L. , Kraige, L. G. 2012. Engineering Mechanics: Dynamics, John Wiley & Sons, USA