

# DİNAMİK - 7



**Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali Dayıođlu**  
**Ankara Üniversitesi Ziraat Fakültesi**  
**Tarım Makinaları ve Teknolojileri Mühendisliđi Bölümü**

# 7. HAFTA

## Kapsam:

- Parçacık Kinetiği,
- Kuvvet – İvme Yöntemi
- Newton hareket yasaları,
- Parçacık sistemleri,
- Hareket denklemleri
- Kartezyen koordinatlar
- Analiz prosedürü
- Teğet ve Normal Koordinatlar
- Örnek problemler çözümleri

## **BÖLÜM 2**

### **Parçacık Kinetiği Kuvvet – İvme Yöntemi**

## 2.1. Newton Hareket Denklemleri

**Birinci Bağıntı:** Cisme etki eden kuvvet sıfırsa, cisim durgun ise hareketsiz kalmaya devam eder, bir hız ile ilerliyorsa hızını korur.

**İkinci Bağıntı:** Bir cisme etki eden net bileşke kuvvet cisme, kuvvetin şiddeti ile doğru orantılı bir ivme kazandırır.  
İvme cismin kütlesi ile ters orantılıdır. İvme bileşke kuvvet yönündedir.

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

**Üçüncü Bağıntı:** Bir cisme etki eden kuvvete daima eşit ve ters yönlü bir tepki kuvveti oluşur.

Birinci bağıntı aslında ikinci bağıntının özel halidir: İvmesiz durum:

$$\sum \mathbf{F} = 0$$

## Newton Hareket Denklemleri

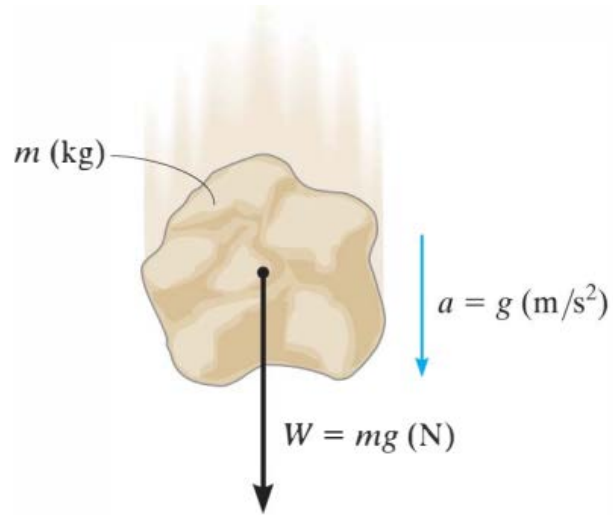
İkinci bağıntıda geçen kütle cisme ait değişmez bir özellik olup kg birimi ile ifade edilir.

Değişken olan cismin ağırlığıdır.

Ağırlık  $m \cdot g$  ile ifade edilir.

$g$  yer çekim ivmesi dünya üzerinde küçük farklılıklar gösterir.

İvme  $m/s^2$  birimi ile ifade edildiği için ağırlık  $kg \cdot m/s^2$  veya Newton (N) birimi ile ifade edilir.



$$W = mg \text{ (N)} \quad (g = 9.81 \text{ m/s}^2)$$

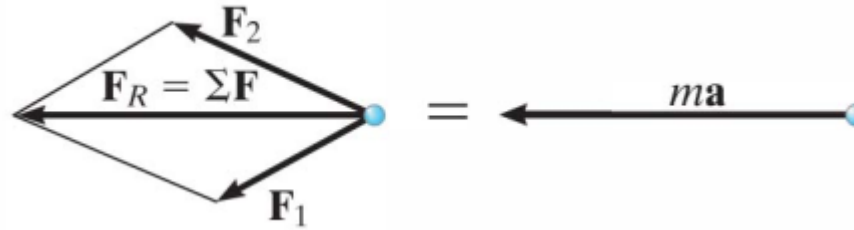
## 2.2 Hareket analizi

- 1) Koordinat sistemi seçimi,
- 2) Serbest cisim diyagramı çizimi ve bütün kuvvetlerin belirtilmesi
- 3) Her bir koordinat için  $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$  denklemini bileşenlerine ayrıştırılmış olarak yazılır.
- 4) Kinematik kısıtlar yazılır.

## Hareket Denklemi

Bir parçacık üzerine birden çok kuvvet etki ettiği zaman bileşke kuvvet  $F_R$  tüm kuvvetlerin vektörel toplamıyla belirlenir:

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$



Serbest  
cisim  
diyagramı

Kinetik  
diyagramı

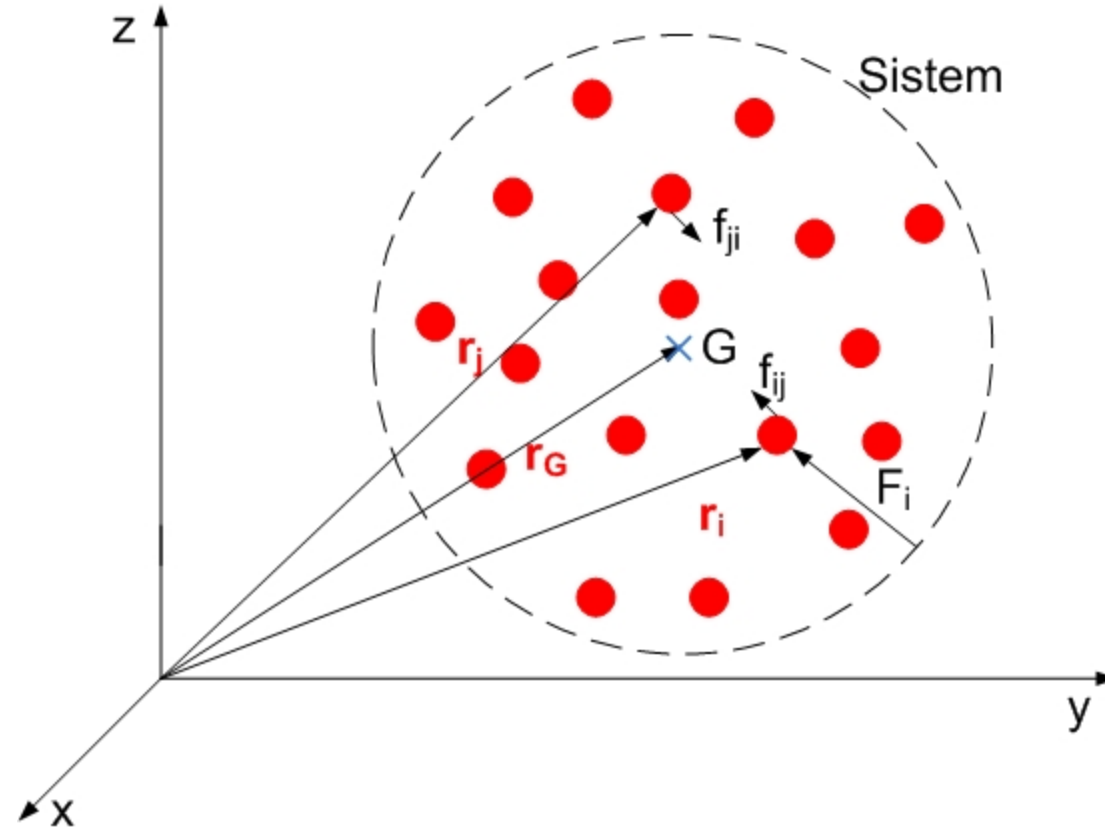
## 2.3 Parçacık Sistemleri

Sistem n adet parçacıktan oluşur.  
Hareket denklemleri tanımlanır.

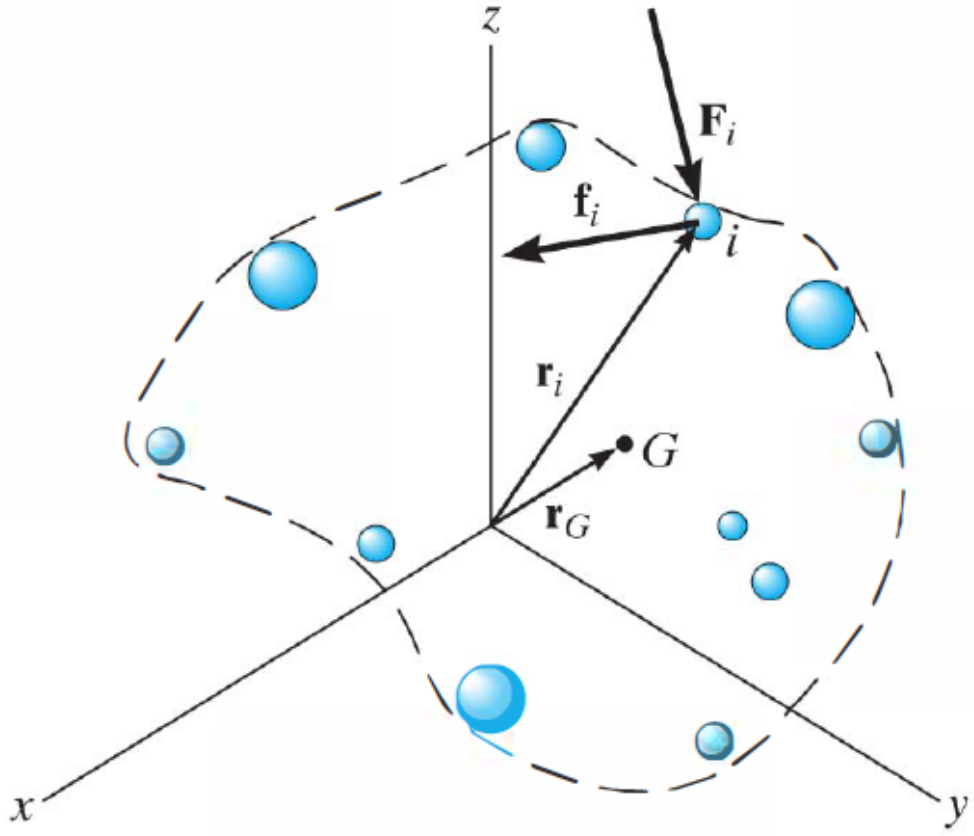
$$F_i + \sum_{j=1}^n f_{ij} = m_i a_i$$

$$\sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n m_i a_i$$

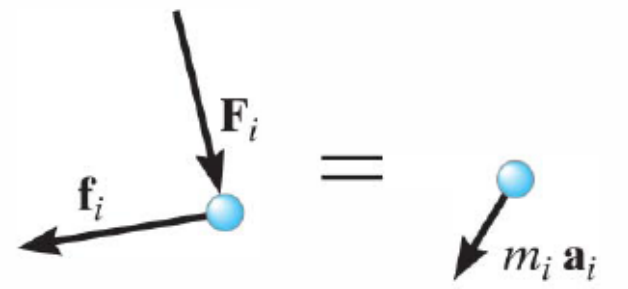
$$\sum_{i=1}^n F_i = m a_G$$







Eylemsiz koordinat sistemi



Serbest  
cisim  
diyagramı

Kinetik  
diyagramı

## 2.4. Hareket Denklemleri - Kartezyen Koordinatlar

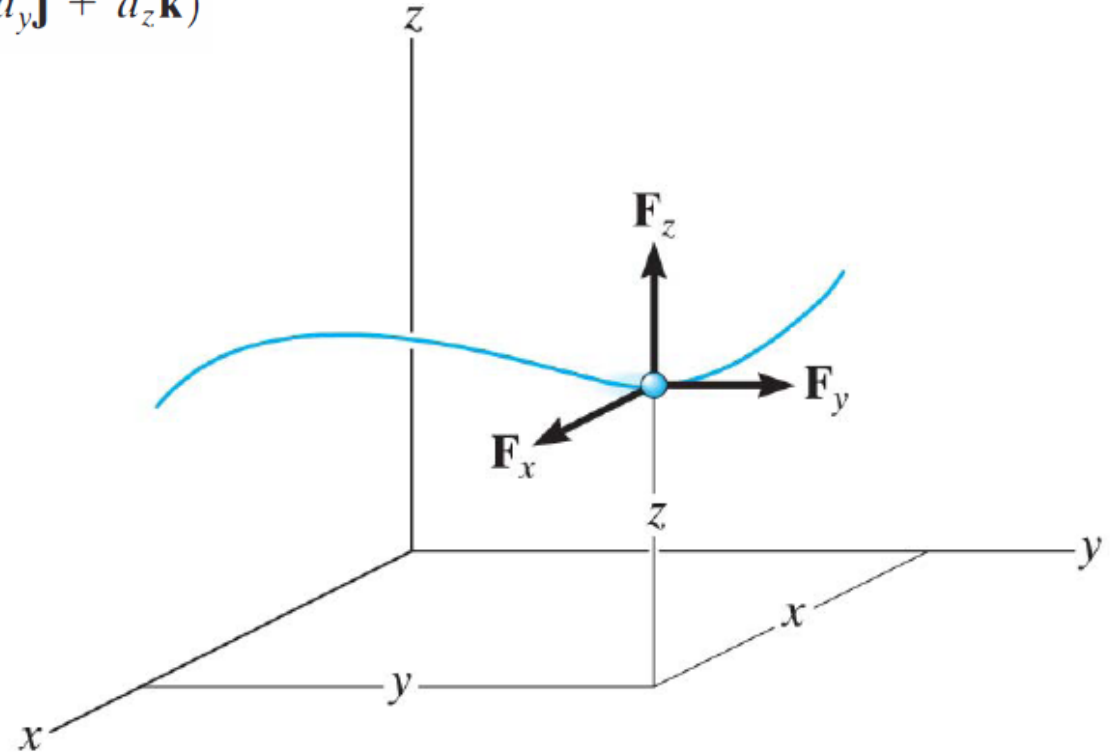
Kuvvet bileşenleri x y z göre tanımlanabilir.

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}; \quad \Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} + \Sigma F_z \mathbf{k} = m(a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k})$$

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$\Sigma F_y = ma_y$$

$$\Sigma F_z = ma_z$$



## 2.5 Parçacık Kuvvet – İvme Yöntemi: Analiz prosedürü

Hareket denklemleri bir parçacık üzerine etkiyen kuvvetleri ve oluşan ivmelenmiş hareket arasındaki ilişkileri belirlenmesi, problemlerin çözümü için kullanılır.

### Serbest cisim diyagramı (SCD)

- Çoğunlukla x-y-z koordinatları parçacığın hareketinin analizinde kullanılır.
- Koordinatlara göre parçacığın serbest cisim diyagramı çizilir.
- Bu diyagramın çizimi önemlidir. Çünkü parçacık üzerine etkiyen tüm kuvvetler ( $\sum F$ ) x-y-z bileşenlerinin grafik olarak gösterilmesini sağlar.
- Parçacığın ivmesinin yönü ve cebirsel işareti tanımlanmalıdır. Eğer işaret bilinmiyorsa, matematiksel olarak uygun bir varsayım tanımlanır.
- İvme kinetik diyagram üzerinde  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  olarak gösterilebilir.
- Problemin bilinmeyenleri diyagram üzerinde gösterilir.

## 2.5 Parçacık Kuvvet – İvme Yöntemi: Analiz prosedürü

### Hareket denklemleri

- Kuvvetler SCD ‘dan doğrudan çözümlenebiliyorsa, skaler bileşen formunda hareket denklemleri yazılır.
- Problemin geometrisi üç boyutlu olmasından dolayı karmaşık oluyorsa, çözüm için Kartezyen vektör analizi kullanılabilir.
- **Sürtünme:** Parçacık pürüzlü bir yüzeye temas halindeyse, temas eden yüzeyde etkili olan sürtünme ( $F_f$ ) ve normal ( $N$ ) kuvvetlerle ilişkili sürtünme denklemini kullanmak gerekebilir. Burada kinetik sürtünme katsayısı  $\mu_k$  ve  $F_f = \mu_k N$  kullanılabilir.
- **Yay:** Bir parçacık kütlesi yok varsayılabilir bir yaya bağlıysa, yay kuvveti  $F_s = ks$  ile ilişkilendirilebilir. Burada,  $k$  yay katsayısı,  $l$  yayın uzamamadan sonraki deformasyon uzunluğu,  $l_0$  ise yayın uzamadan önceki uzunluğu olarak  $s = l - l_0$  tanımlanır.

## 2.5 Parçacık Kuvvet – İvme Yöntemi: Analiz prosedürü

### Kinematik

- Parçacığın hızı yada konumu bulunacaksa, kinematik denklemleri uygulamak gerekecektir. Parçacığın ivmesi  $\sum F = ma$ 'dan belirlenir.
- İvme zamanın fonksiyonu ise,  $a = dv/dt$  ve  $v = ds/dt$  den integral alınarak hız ve konum belirlenir.
- İvme yer değiştirmenin fonksiyonu ise, konumun fonksiyonu olarak  $a ds = v dv$  integralinin çözümü ile parçacığın hızı konuma göre belirlenir.

- İvme sabit ise, parçacığın hız ve konumunu belirlemek için

$$v = v_0 + a_c t$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$$

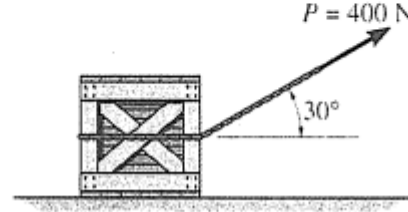
$$v^2 = v_0^2 + 2 a_c (s - s_0)$$

eşitlikleri kullanılır.

- Problem bağımlı hareketi kapsıyorsa, makara – halat – hız – ivme eşitlikleri için gösterilen yöntemler kullanılır. Makara – yük referans çizgileri ve matematiksel işaretler tanımlanır.
- Bilinmeyen bir vektör bileşeni için elde edilen çözüm negatif ise, yön ters çevrilir.

## Örnek Problem

Şekil 13–6a’da gösterilen 50 kg’lık bir sandık, kinetik sürtünme katsayısı  $\mu_k = 0.3$  olan yatay bir düzlemde durmaktadır. Sandık, şekilde gösterildiği gibi 400-N’luk bir çekme kuvveti uygulandığında devrilmiyorsa, durağan halden başlayarak 5 s sonunda kazandığı hızı belirleyiniz.



Bu problemde hareket denklemlerini kullanmak gerekir, çünkü sandığın ivmesi ile harekete neden olan kuvvet arasında bir bağıntı kurulabilir. Sonra sandığın hızı kinematik kullanılarak belirlenebilir.

**Serbest-Cisim Diyagramı.** Şekil 13–6a’daki sandığın ağırlığı  $W = mg = 50 \text{ kg} (9.81 \text{ m/s}^2) = 490.5 \text{ N}$ ’dur. Şekil 13–6b’de gösterildiği gibi, sürtünme kuvveti,  $F = \mu_k N_C$  büyüklüğüne sahiptir ve sandığın hareketini engellediğinden sola doğru etki eder.  $a$  ivmesinin pozitif  $x$  doğrultusunda yatay olarak etkideği varsayılır. İki bilinmeyen vardır:  $N_C$  ve  $a$ .

**Hareket Denklemleri.** Serbest-cisim diyagramında gösterilen değerleri kullanarak

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x = ma_x; \quad 400 \cos 30^\circ - 0.3 N_C = 50a \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} + \uparrow \sum F_y = ma_y; \quad N_C - 490.5 + 400 \sin 30^\circ = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

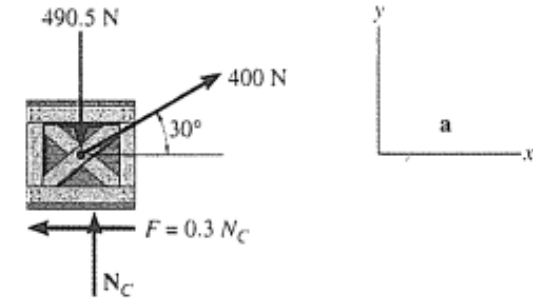
elde ederiz.  $N_C$ ’yi Denklem 2’den çözüp, sonucu Denklem 1 de yerleştirerek, buradan  $a$ ’yı çözersek

$$\begin{aligned} N_C &= 290.5 \text{ N} \\ a &= 5.19 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

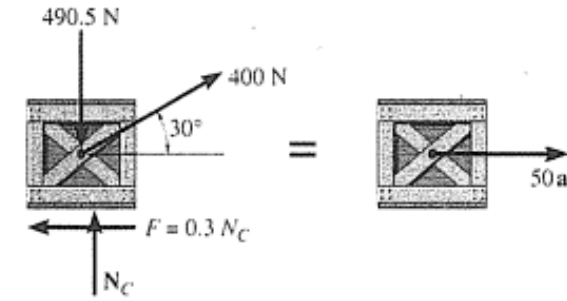
buluruz.

**Kinematik.** İvme *sabit* ve başlangıç hızı sıfır olduğundan, sandığın 5 s sonundaki hızı

( $\rightarrow$ )



(b)



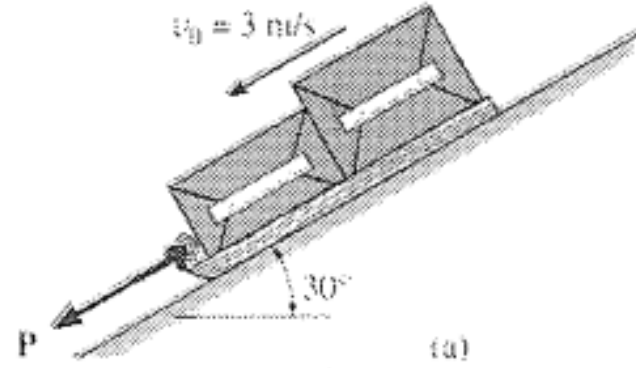
(c)

$$\begin{aligned} v &= v_0 + a_c t \\ &= 0 + 5.19(5) \\ &= 26.0 \text{ m/s} \rightarrow \end{aligned}$$

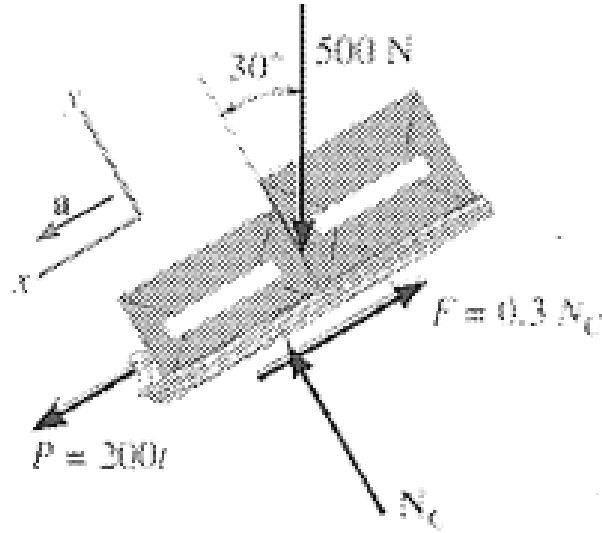
**Yanıt**

## Örnek Problem

Şekil 13–8a’da gösterilen yüklü kızak 500 N’lik bir ağırlığa sahiptir ve üzerine,  $P$  Newton cinsinden ve  $t$  saniye cinsinden olmak üzere, değişken  $P = 200t$  büyüklüğünde bir kuvvet etkimektedir. Kızağın,  $P$  uygulandıktan 2 s sonraki hızını hesaplayınız. Kızağın eğik düzlemden aşağıya doğru hareketinin başlangıç hızı  $v_0 = 3$  m/s’dir ve kızak ve düzlem arasındaki kinetik sürtünme katsayısı  $\mu_k = 0.3$ ’dür.



## Çözüm



**Serbest-Cisim Diyagramı.** Şekil 13–8b’de gösterildiği gibi, sürtünme kuvveti kızıağın kayma yönüne zıt doğrultudadır ve büyüklüğü  $F = \mu_k N_C = 0.3 N_C$ ’dir. Kütle  $m = W/g = 500/9.81 = 51.0$  kg’dır. İki bilinmeyen vardır:  $N_C$  ve  $a$ .

**Hareket Denklemleri.** Serbest-cisim diyagramında gösterilen değerleri kullanarak

$$+\swarrow \sum F_x = ma_x; \quad 200t - 0.3N_C + 500 \sin 30^\circ = 51a \quad (1)$$

$$+\nwarrow \sum F_y = ma_y; \quad N_C - 500 \cos 30^\circ = 0 \quad (2)$$

elde ederiz.  $N_C$ ’yi Denklem 2’den çözüp, sonucu Denklem 1’de yerleştirirsek, sadeleştirmeden sonra

$$a = 3.922t + 2.355 \quad (3)$$

buluruz.

**Kinematik.** İvme zamanın bir fonksiyonu olduğundan, kızıağın hızı,  $t = 0$ ’da  $v_0 = 3$  m/s başlangıç koşullu  $a = dv/dt$  denklemi kullanılarak elde edilir. Böylece,

(+↙)

$$dv = a dt$$

$$\int_3^v v = \int_0^t 1.961t^2 + 2.355t + 3$$

bulunur.  $t = 2$  s olduğu zaman

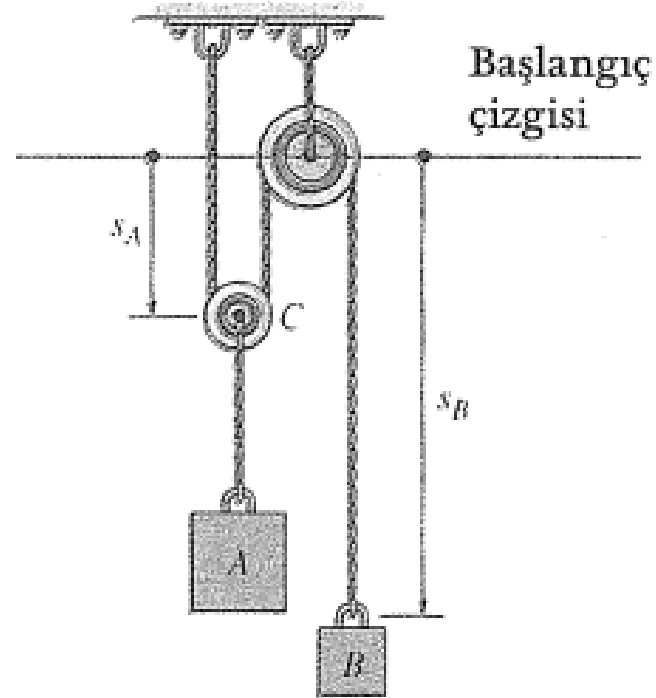
$$v = 15.6 \text{ m/s } \swarrow$$

**Yanıt**



## Örnek Problem

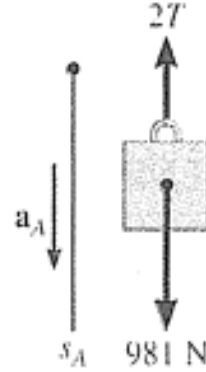
Şekil 13–10a’da gösterilen 100 kg’lık  $A$  bloğu, durağan halden bırakılıyor. Makaraların ve ipin kütlesi ihmal edildiğine göre, 20 kg’lık  $B$  bloğunun 2 s sonraki ivmesini belirleyiniz.



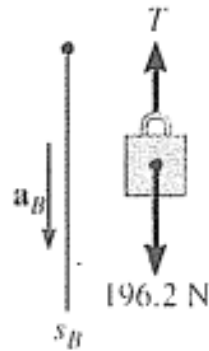
## Çözüm



(b)



(c)



(d)

$A$  ve  $B$  blokları farklı yollar boyunca hareket ettiklerinden, hareketleri ayrı ayrı analiz edilecektir.

**Serbest-Cisim Diyagramları.** Makaraların kütlesi *ihmal edildiğinden*, eylemsizlik etkisi sıfırdır ve Şekil 13–10b’de gösterildiği gibi,  $C$  makarası için denge koşulunu uygulayabiliriz.  $A$  ve  $B$  bloklarına ait serbest-cisim diyagramları, sırasıyla, Şekil 13–10c ve d’de gösterilmiştir. Burada, her iki bloğun  $+s_A$  ve  $+s_B$  doğrultularında aşağıya doğru hızlandığını varsayacağız. Üç bilinmeyen hangileridir?

### Hareket Denklemleri

**Blok A** (Şekil 13–10c):

$$+\downarrow \sum F_y = ma_y; \quad 981 - 2T = 100a_A \quad (1)$$

**Blok B** (Şekil 13–10d):

$$+\downarrow \sum F_y = ma_y; \quad 196.2 - T = 20a_B \quad (2)$$

**Kinematik.** Gerekli üçüncü denklem,  $a_A$  ve  $a_B$  arasında bağıntı kurmak için, makara düzeneğinin kinematiği incelenerek elde edilir. Kesim 12–8 de geliştirilen teknikte,  $s_A$  ve  $s_B$  koordinatları,  $A$  ve  $B$ ’nin konumlarını sabit başlangıç çizgisinden ölçer, Şekil 13–10a.

$$2s_A + s_B = l$$

dir; burada  $l$  sabittir ve ipin toplam düşey uzunluğunu göstermektedir. Bu denklemi zamana göre iki kez türeterek

$$2a_A = -a_B \quad (3)$$

buluruz. 1’den 3’e kadar olan denklemleri yazarken, *pozitif doğrultunun daima aşağıya doğru olduğunun varsayıldığına* dikkat edelim. Bu varsayımın bütün denklemlere uygulanması çok önemlidir, çünkü denklemlerin eş zamanlı bir çözümünü araştırıyoruz. **Çözüm**

$$T = 327.0 \text{ N}$$

$$a_A = 3.27 \text{ m/s}^2$$

$$a_B = -6.54 \text{ m/s}^2$$

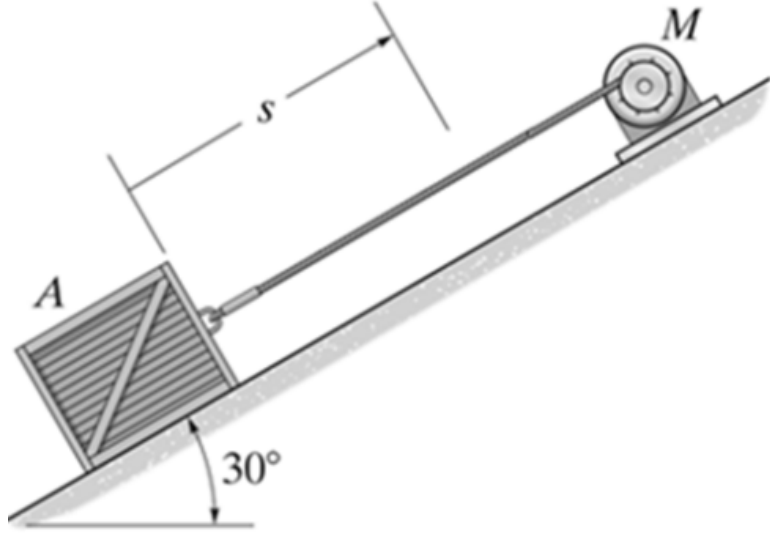
yi verir. O halde,  $A$  bloğu *aşağıya doğru* hızlandığı zaman,  $B$  bloğu *yukarıya doğru* hızlanır.  $a_B$  sabit olduğundan,  $B$  bloğunun 2 s’deki hızı

$$\begin{aligned} (+\downarrow) \quad v &= v_0 + a_B t \\ &= 0 + (-6.54)(2) \\ &= -13.1 \text{ m/s} \end{aligned}$$

**Yanıt**

olur. Eksi işareti  $B$  bloğunun yukarıya doğru hareket ettiğini gösterir. Niçin?

## Örnek Problem



**Verilen:** Motor kabloyu sabit ivmeyle içine doğru sarmaktadır, öyleki, başlangıçta durağan haldeki 20-kg'lık sandık  $s = 6$  m'lik yolu 3 s'de almıştır.  $\mu_k = 0.3$ .

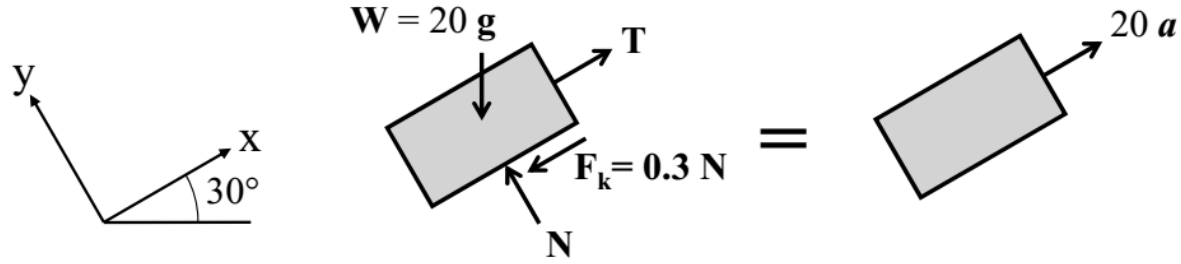
**İstenen:** Kabloda gelişen çekme kuvveti.

**Plan:**

- 1) Sandığın SCD ve kinetik diyagramını çizin.
- 2) Kinematik bir denklemlerle sandığın ivmesini hesaplayın.
- 3) Kablo kuvvetini hesaplamak için hareket denklemini kullanın.

## Çözüm

1) Sandığın serbest cisim diyagramını ve kinetik diyagramını çizin.

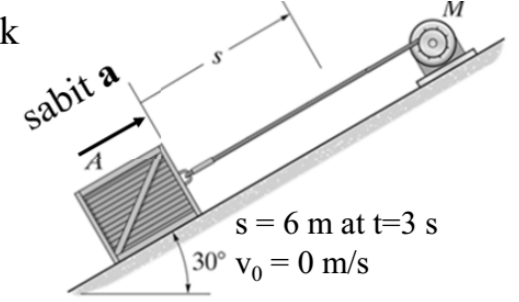


Hareket yokmuş yukarı olduğundan, x eksenini eğimli yüzey boyunca uzanacak şekilde x-y eksenini döndürün. Bu durumda hareket, sadece x doğrultusunda oluşacaktır.

Yüzey ve sandık arasında bir sürtünme kuvveti olur.  
*Bu, neden SCD üzerinde gösterildiği yöndedir?*

2) Kinematik denklem kullanılarak

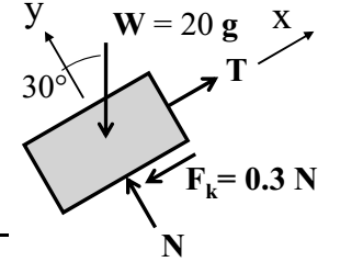
$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$
$$\Rightarrow 6 = (0) 3 + \frac{1}{2} a (3^2)$$
$$\Rightarrow a = 1.333 \text{ m/s}^2$$



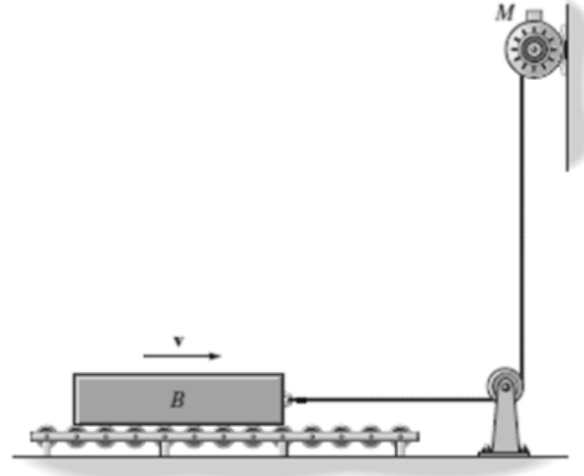
3) Hareket denklemini uygula

$$+\nearrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -20 g (\cos 30^\circ) + N = 0$$
$$\Rightarrow N = 169.9 \text{ N}$$

$$+\nearrow \sum F_x = m a \Rightarrow T - 20g(\sin 30^\circ) - 0.3 \text{ N} = \underline{20 a}$$
$$\Rightarrow T = 20 (9.81) (\sin 30^\circ) + 0.3(169.9) + \underline{20 (1.333)}$$
$$\Rightarrow T = 176 \text{ N}$$



## Örnek Problem



**Verilen:** 300-kg'lık  $B$  çubuğu, başlangıçta durağan haldeyken, seri haldeki küçük tekerler üzerinden çekiliyor.  $M$  motoru kabloyu  $v = (0.4 t^2)$  m/s ile içine sarmaktadır, burada  $t$  saniye cinsindedir.

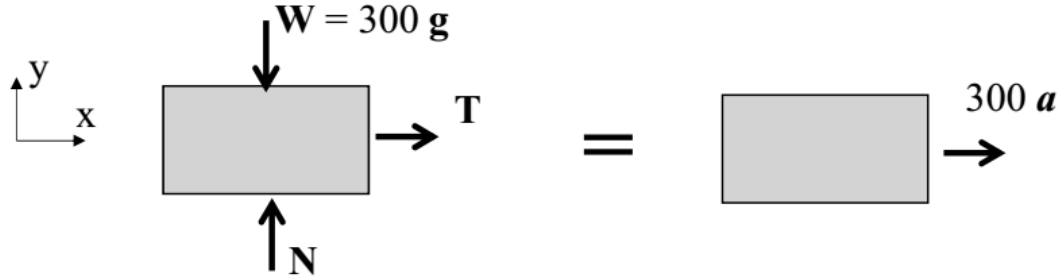
**İstenen:** Kablodaki kuvvet ve  $t = 5$  s anındaki  $s$  mesafesi.

**Plan:** Hem kuvvet hem de hız terimlerini içerdiğinden, bu problem hem kinematik hem de kinetik (hareket denklemi) gerektirmektedir.

- 1) Çubuğun SCD ve kinetik diyagramını çizin.
- 2) İvmeyi ve kuvveti bulmak için hareket denklemini uygulayın.
- 3) Kinematik denklem kullanarak, mesafeyi hesaplayın.

## Çözüm

1) Çubuğun serbest cisim diyagramı ve kinetik diyagramı:



Çubuğun x ekseninde hareket ettiğine dikkat!!

2) x yönündeki harekete, skaler hareket denklemini uygulayın,

$$+ \rightarrow \sum F_x = T = 300 a$$

$$v = 0.4 t^2 \text{ olduğundan } a = ( dv/dt ) = 0.8 t$$

$$T = 240 t \Rightarrow t = 5s \text{ anında } T = 1200 \text{ N olur.}$$

3) Mesafeyi hesaplamak için kinematik denklem kullanılırsa;

$v = (0.4 t^2) \text{ m/s}$  olduğundan

$$s = s_0 + \int v dt = 0 + \int_0^t (0.4 t^2) dt$$

$$\Rightarrow s = \frac{0.4}{3} t^3$$

$t = 5 \text{ s}$  anında,

$$s = \frac{0.4}{3} 5^3 = \underline{16.7 \text{ m}}$$

## 2.6 Teğet ve Normal Koordinatlar

Hareket denklemi  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  teğet ve normal koordinatlara göre de yazılabilir:

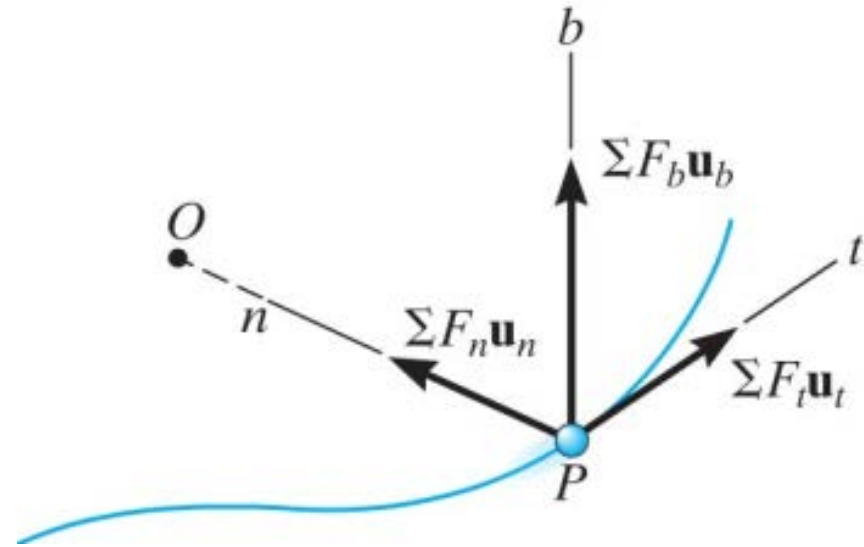
$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\Sigma F_t \mathbf{u}_t + \Sigma F_n \mathbf{u}_n + \Sigma F_b \mathbf{u}_b = m\mathbf{a}_t + m\mathbf{a}_n$$

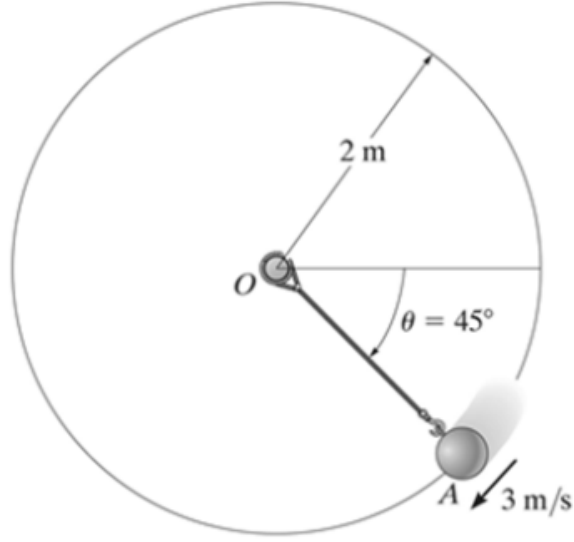
$$\Sigma F_t = ma_t$$

$$\Sigma F_n = ma_n$$

$$\Sigma F_b = 0$$



## Örnek Problem



**Verilen:** 10-kg'lık top düşey duran dairesel yolun A noktasındayken 3 m/s'lik bir hıza sahiptir.

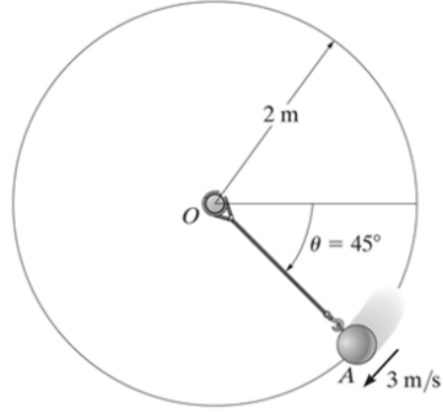
**İstenen:** Kablodaki çekme kuvveti ve topun süratindeki artış.

- Plan: 1) Problem eğrisel bir yörünge içerdiğinden ve yola dik olan kuvvetin bulunmasını gerektirdiğinden n-t koordinatlarını kullanın. Topun SCD ve kinetik diyagramlarını çizin.
- 2) n-t yönlerinde hareket denklemlerini uygulayın.

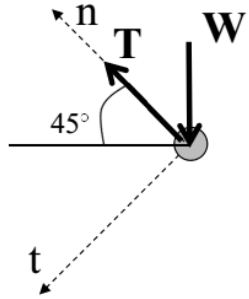


## Çözüm

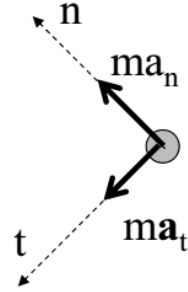
- 1) Topun A noktasına n-t koordinat sistemi yerleştirir, yani  $45^\circ$  açıyla. Topun SCD ve kinetik diyagramını çiz.



SCD



Kinetik diyagram



=

- 2) n-t yönlerinde hareket denklemlerini uygula.

$$(a) \sum F_n = ma_n \Rightarrow T - W \sin 45^\circ = m a_n$$

$$a_n = v^2/\rho = 3^2/2, \quad W = 10(9.81) \text{ N} \quad \text{ve} \quad m = 10 \text{ kg}$$

$$\Rightarrow T - 98.1 \sin 45^\circ = (10) (3^2/2)$$

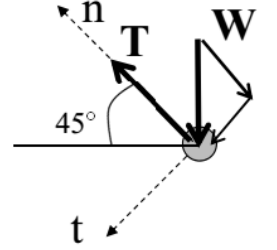
$$\Rightarrow T = \underline{114 \text{ N}}$$

$$(b) \sum F_t = ma_t \Rightarrow W \cos 45^\circ = ma_t$$

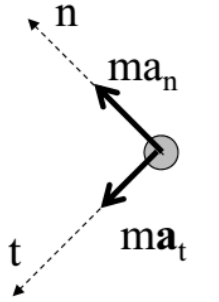
$$\Rightarrow 98.1 \cos 45^\circ = 10 a_t$$

$$\Rightarrow a_t = (dv/dt) = \underline{6.94 \text{ m/s}^2}$$

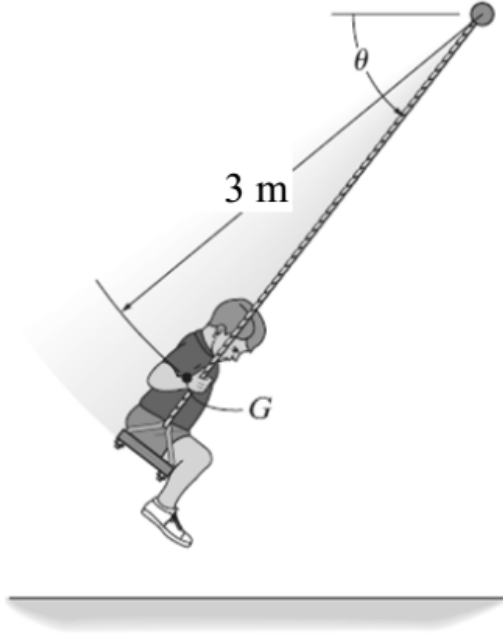
SCD



Kinetik diyagram



## Örnek Problem



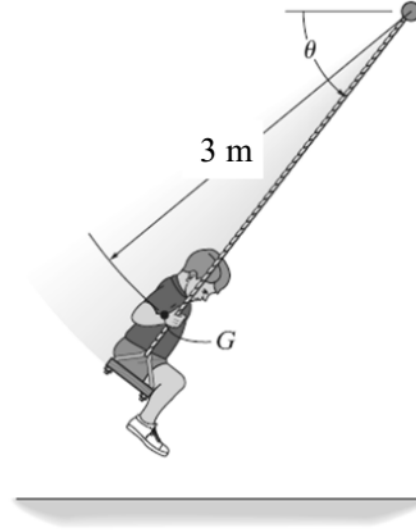
**Verilen:** Çocuk 200 N'luk bir ağırlığa sahiptir.  $\theta = 60^\circ$  anında çocuğun G ağırlık merkezi  $v = 5 \text{ m/s}$  'lik bir hıza sahiptir.

**İstenen:** Salınan iki zincirin herbirindeki çekme kuvveti ve tam o anda süratindeki artış oranı.

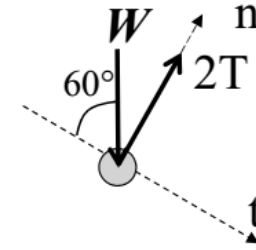
- Plan:
- 1) n-t koordinat sistemini kullan ve çocuğun bir parçacık olduğunu farzet. SCD ve kinetik diyagramları çiz.
  - 2) n-t yönleri için hareket denklemini uygula.

# Çözüm

- 1) Çocuk üzerindeki n-t koordinat sistemi  $60^\circ$ 'lik açı ile yerleştirilebilir. Çocuğu bir yumurcak/parçacık olarak düşünecek olursak SCD ve kinetik diyagramlar şu şekilde çizilebilir.

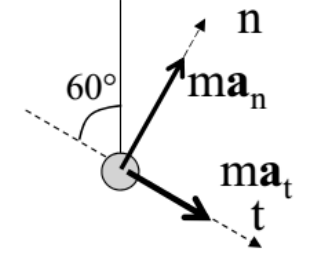


SCD

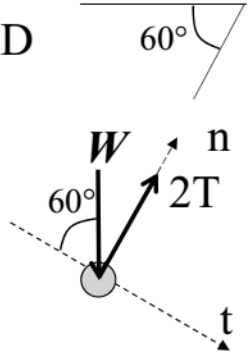


=

Kinetik diyagram

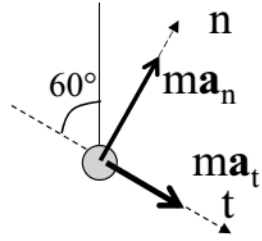


SCD



=

Kinetik diyagram



- 2) n-t yönleri için hareket denklemini uygula.

$$\sum F_n = ma_n \Rightarrow 2T - W \sin 60^\circ = ma_n$$

$$a_n = v^2/\rho = 5^2/3, \quad W = 200 \text{ N}, \quad m = 20.39 \text{ kg}$$

$$T = \underline{171 \text{ N}}$$

$$\sum F_t = ma_t \Rightarrow 200 \cos 60^\circ = (200 / 9.81) a_t$$

$$a_t = \dot{v} = \underline{4.91 \text{ m/s}^2}$$

## **Ders Kitabı:**

- Hibbeler, 2014. Mühendislik Mekaniği – Dinamik, Literatür Yayıncılık, İstanbul  
Çevirenler: Ayşe Soyuçok, Özgün Soyuçok,  
Orijinal isimi: Engineering Mechanics SI Metric Edition, Dynamics.

## **Kullanılan Kaynaklar:**

- Ferdinand Beer, Phillip Cornwell, E. Russell Johnston 2014. Mühendisler için Vektör Mekaniği Dinamik Literatür Yayıncılık, İstanbul, Çevirmen: Osman Kopmaz, Ömer Gündoğdu.  
Orijinal isimi: Vector Mechanics for Engineers: Dynamics
- Hibbeler, R. C., 2015. Engineering Mechanics: Dynamics, 14th Edition, Prentice Hall, New Jersey USA.
- Meriam, J. L. , Kraige, L. G. 2012. Engineering Mechanics: Dynamics, John Wiley & Sons, USA