DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SINIFLAMASI

EM problemler,bu problemlerin tanımladığı denklemlere göre sınıflandırılırlar.Denklemler diferansiyel integral veya her ikisine olabilir.Çoğu EM problemler operatör denklemi ile ifade edilebilir.

$$L\Phi=g \qquad (1.55)$$

L→diferansiyel,integral veya integral dif. operatörü
g→bilinen yayılma veya kaynak ve Φ bilinmeyen çözülecek bilinmeyen fonksiyondur.

Tipik bir örnek elektrostatik problem,poisson denklemi.

$$-\nabla^2 V=\frac{\rho_V}{\varepsilon}$$

poisson denkleminin integral formu

$$V=\int\frac{\rho_v d_v}{4\pi\varepsilon r^2}$$

burada

$$L=\int\frac{d_V}{4\pi r^2}, \quad g=V \quad \Phi=\frac{\rho_v}{\varepsilon} \quad \text{dir.}$$

EM problemler doğrusal 2.derece diferansiyel denklemlerdir ve genel formu aşağıdaki gibi verilir.

$$a\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2}+b\frac{\partial^2\phi}{\partial X\partial Y}+c\frac{\partial^2\phi}{\partial Y^2}+d\frac{\partial\phi}{\partial X}+e\frac{\partial\phi}{\partial Y}+f\phi=g$$

veya kısaca

$$a\phi_{xx}+b\phi_{xy}+c\phi_{yy}+d\phi_y+f\phi=g$$

(1.58)

a,b,c→x ve y nin fonksiyonlarıdır.Eğer Φ ye de bağımlı işler,PDE-nonlineardir.Fakat coğu EM problem doğrusal PDE dir.yani a,b ve c sabittir.

Eğer g(x,y)=0 ise denklem homojendir.
g(x,y)$\neq$0 ise denklem homojen değildir.

(1.58) denklemi (1.55) ile aynı formdadır.

$$L\phi=g$$

$$L=a\frac{\partial^2}{\partial X^2}+b\frac{\partial^2}{\partial X\partial Y}+c\frac{\partial^2}{\partial Y^2}+d\frac{\partial^2}{\partial X}+e\frac{\partial}{\partial Y}+f$$

PDE-sınır değerli veya başlangıc değerli olabilir.PDE sınır koşulları “steady-state” denklemleri olarak isimlendirilir.Eğer sadece başlangıç değeri belirtilmiş ise,”transient” denklemleri olarak isimlendirilir.
Sınır koşulları belirtilmiş PDE’lere “steady-state” denklemleri denir.

PDE
- eliptik→b^2-4ac<0
- hiberbolik→ >0
- parabolik→ b^2-4ac=0 dir.

Her üç katagoride bilinen fiziksel olaylar tanımlayan (model) PDE vardır.
(1.58)’deki matematiksel model→ısı transferi,sınır-tabaka çıkışı(boudery-layer flow)

vibrations ⇒
elasticity ⇒ problemlerini de açıklamak için kullanılır.
electrostatic ⇒
wave propagation ⇒

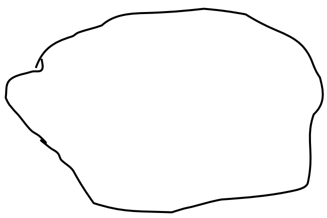
Eliptik PDE sınır değerleri gibi steady-state phenonera ile ilişkilidir

Laplace denklemi $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial X^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial Y^2}=0$

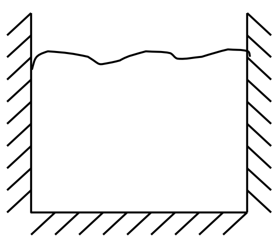
Poisson denklemi $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial X^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial Y^2}=g(x,y)$

(Her ikisi de Helmoltz denkleminin özel durumudur.($\nabla^2\varphi+h^2\varphi=g$))
Her iki durumda da a=c=1,b=0 ‘dır.
Eliptik PDE, interior problemi ve bundan dolayı çözüm bölgesi kapalı(closed) veya sınırlandırılmıştır.

Hiperbolik PDE denklemler yayılman problemlerinde ortaya çıkar.Çözüm bölgesi açık ve dolayısıyla bir çözüm başlangıç koşullarında dışa doğru sonsuza kadar uzanırlar.Bu sırada özel sınır koşullarını sağlarlar.



ELİPTİK PROBLEM
(R kapalı alan ve sınır koşulları tanımlı)



PARABOLİK VEYA HİPERBOLİK PROBLEMLER
(R açık bölge ve çözüm R yönünde yayılır)

Hiperbolik denkleme tipik bir örnek 1-B dalga denklemidir.

$a=u^2$, b=0 ,c=-1

Parabolik PDE ler,rastgele haraketlere göre ilgilenilen büyüklüğü yavaşça değiştirir ve bu hareketin "veriation"unu oluşturur.
En genel parabolik PDE,1-B diffusion(heat) denklemidir.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} = k\frac{\partial \phi}{\partial t} \quad , \quad a=1 \;;\; b=0 \;;\; c=0$$

Hiperbolik gibi parabolik denklemlerinde çözüm bölgesi açıktır.Başlangıç sınır koşulları hiperbolik denklemler gibidir.Tek farklılık bir başlangıç koşulu t=0 gereklidir.
Her iki denklem de benzer tekniklerle çözülür.Ancak eliptik denklemlerin çözümü daha zordur ve farklı tekniklerle çözülebilir.

LΦ=g→determinitik problem.Çünkü bilinmeyen değer (Φ) direk çözülür.

LΦ=λΦ→nondeterministik problem.Çünkü (Φ) dolylı yoldan çözülür.

Daha genel olarak,

LΦ=λμΦ→vibration ve wavequile problemler ile eigen problemlerde karşılaşılır.
λ→eigen problem→m-1gibi doğrusal operatör

1.3.3 SINIR KOŞULLARININ SINIFLAMASI

Problemimiz bilinmeyen Φ fonksiyon hesabıdır.Φ çözüm bölgesinde (R) tanımlıdır ve s-üzerinde(r-nin sınırı) bilinen koşullara uymalıdır.
Bu sınır koşulları Dirichlet ve Neumann tipleridir.
Her ikiside kullanılırsa karışık sınır koşulu olarak isimlendirilir.

(1)Dirichlet sınır koşulu

Φ(r)=0 ,r-S nin üzerinde.

(2)Neumann sınır koşulu

$\frac{\partial \phi(r)}{\partial n} = 0$, r→S'nin üzerinde ise normal türevi sıfırdır.

(3)Karışık sınır koşulu

$\frac{\partial \phi(r)}{\partial n} + h(r)\phi(r) = 0$, r→S üzerindedir.

h(r)→bilinen fonksiyon ve $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ →dışa doğru normal türev.

Bu üç sınır koşulu homojen sınır koşullarıdır.Homojen olmayan sınır koşulları(daha genel olan)

Dirichlet:Φ(r)=p(r),r S'nin üzerinde.

Neumann: $\frac{\partial \phi(r)}{\partial n} = q(r)$,r S'nin üzerinde.

Karışık: $\frac{\partial \phi(r)}{\partial n} + h(r)\phi(r) = w(r)$,r S'nin üzerinde.

p(r),q(r) ve w(r) sınırlarda bilinen fonksiyonlardır.

Örneğin Φ(0)=1→homojen olmayan Dirichlet sınır koşulu.
Φ(0)=0→homojen Dirichlet sınır koşulu.
Φ(1)=2→homojen olmayan Neumann sınır koşulu.
Φ(1)=0→ homojen olmayan Neumann sınır koşulu.

Örneğin elektrostatik durumda;
eğer elektrik gerilim s. üzerinde tanımlı ise Dirichlet sınır koşulu
eğer yüzeyde yük- $\rho_s = D_n = \varepsilon \frac{\partial V}{\partial n}$ tanımlanmışsa Neumann sınır koşulu.

Φ'nin bulunması-Dirichlet veya Neumann probleminde bölge içerisinde Φ ve $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ sınırlarda tanımlı ise harmoniktir.

"homojen"in farklı anlamı vardır.
Çözüm bölgesi homojen olabilir eğer ∇, ε ve μ -sabitse(r-bölgesinde).
PDE- homojendir eğer g=0 ve LΦ=0.
Sınır koşulu homojendir eğer p(r)=q(r)=w(r)=0.

ÖDEV

Aşağıdaki denklemleri eliptik,hiperbolik veya parabolik olmasına göre sınıflayın..

(a) $4\phi_{xx} + 2\phi_x + \phi_y + x + y = 0$

(b) $e^x \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \cos y \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = 0$

(C) $\phi_{xx} + 2\phi_{xy} + 3\phi_{yy} + 4\phi_x + 5\phi = XY$

(d) $\phi_{xx} = 2\phi_{yy} + \phi - y$

(e) $\alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} = \beta \frac{\partial \phi}{\partial X} + \frac{\partial \phi}{\partial t}$ (α,β sabit)(ısı denklemi)

(f) $\nabla^2 \phi + \lambda \phi = 0$ (Helmoltz denklemi)

(g) $\nabla^2 \phi + [\lambda - \rho(x)]\phi = 0$ (zaman bagımsız-Schrodinger denklemi)