SAYISAL İNTEGRAL

Newton- Cotes Integral Formülleri

Tablo şeklinde veya karmaşık formülleri integre edilmesi kolay fonksiyonlarla ifade etme esasına dayanır:

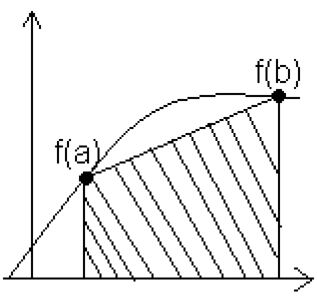
$$I=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f_n(x)dx \qquad f_n=a_0+a_1+\ldots\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx_n$$

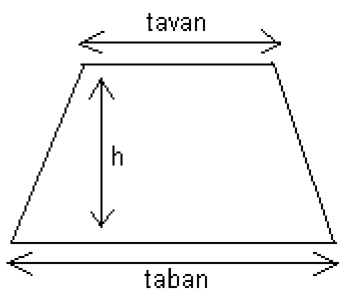
Burada n- polinom derecesidir.
Şerit yöntemi (D- derece polinomlar) kullanarak:
1-Trapez (Yamuk) Kuralı :
Newton- Cotes kuralı kapalı integral formüllerinin ilki olup, polinomun 1. derece olması durumuna gelir.

$$I=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f_1(x)dx \qquad f_1=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$I=\int_a^b \left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]dx=(b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2}$$ Trapez kuralı olarak bilinir.

$(b-a)$=Genişlik, $\frac{f(b)+f(a)}{2}$=Orta yükseklik





Trapez Kuralında Hata:

$E_H=-\frac{1}{12}f''(\zeta)(b-a)^3 \rightarrow$ fonksiyon doğrusal ise hata 0 olur. İkinci türev =0'dır.

$\zeta \rightarrow a<\zeta<b$

2. ve daha yüksek dereceden fonksiyonlarda hata büyür.
Hata ve birinci derece polinom ile integral:

$$I=\int_a^b\left[f(a)+\Delta f(a)\propto+\frac{f''(\zeta)}{2}\propto(\propto-1)h^2\right]dx$$

$\propto = \dfrac{(x-a)}{h}$, $dx = h.d\propto$, $h=b-a$

Dolayısıyla integral sınırı (0-1)

$$I = h\int_0^1 \left[f(a) + \Delta f(a)\propto + \frac{f''(\zeta)}{2}\propto(\propto-1)h^2\right]d\propto$$

$h <<$ ise $f''(\zeta) \rightarrow$ sabit kabul edilirse ;

$$I = h\left[\propto f(a) + \frac{\propto^2}{2}\Delta f(a) + \left(\frac{\propto^3}{6} - \frac{\propto^4}{4}\right) f''(\zeta)h^2\right]_0^1$$

Hesaplama yapılırsa;

$$I = h\left[f(a) + \frac{\Delta f(a)}{2}\right] - \frac{1}{12} f''(\zeta)h^3$$ olur.

$\Delta f(\propto) = b-a \Rightarrow I = h\dfrac{f(a)+f(b)}{2} - \dfrac{1}{12} f''(\zeta)h^3$

$h\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$ = trapez kuralı

$-\dfrac{1}{12} f''(\zeta)h^3$ = kesme hatasıdır.

Örnek: Trapez kuralının tekli uygulaması

$F(x)=0{,}2$
$25x-200x^2+675x^3-900x^4+400x^5$

fonksiyonunda a=0-b=0,8'e kadar integral

$f(0)=0{,}2$
$f(0{,}8)=0{,}232$
$I = 0{,}8\ \dfrac{0{,}2+0{,}232}{2} = 0{,}1728$
$E_t = GD - YD$ $\quad$ $E_t = 1{,}640533 - 0{,}1728 = 1{,}467733$

$\varepsilon_t = \%89{,}5$

GD= analitik çözümden gerçek değer

Gerçek değer bilinmez. Bu durumda tahmini hata

$f''(x)=-400+4050x-10800x^2+8000x^3$

$$f''(x)=\frac{\int_0^{0,8}(-400+4050x-10800x2+8000x3)dx}{0,8-0}$$

$$E_a=-\frac{1}{12}(-60)(0,8-0)^3=2,56$$

E_a=yaklaşık hata

$$Ea=-\frac{1}{12}f''(\zeta)(b-a)^3$$

$a<\zeta<b$

Trapez Kuralının Çoklu Uygulanması

a-b aralığını küçük aralıklara bölerek trapez kuralı iyileştirilebilir. Her aralık için bulunan değerler toplanarak tüm integral elde edilir. Buna çoklu-uygulamalı veya bileşik integral denir.

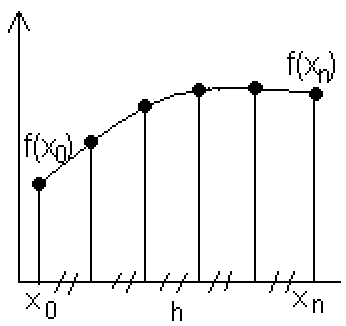
(n+1) adet eşit aralıklı nokta

$x_0,x_1,\cdots\cdots\cdots,x_n$

$h=\frac{b-a}{n}$ eşit genişliğe sahip n- adet aralık için integral:

$$I=\int_{X_0}^{x_1}f(x)dx+\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx+\cdots\cdots\cdots\cdots+\int_{xn-1}^{xn}f(x)dx$$

Trapez kuralı uygulamaları



$h=\frac{b-a}{n}$

$$I = h\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + h\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}$$

veya

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

Genel formu kullanırsak:

Alan=Genişlik*Ortalama Yükseklik

$$I = (b-a)\ \left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]/2n$$

h = b-a = genişlik

Burada f(x) katsayılarının toplamı 1'e eşit olduğundan, ortalama yükseklik, fonksiyon değerlerinin ağırlıklı ortalamasını göstermektedir.
Bu denkleme göre içteki noktalar, uç noktalar olan f(x0) ve f(xn)'in iki katı ağırlığına sahiptir.

Trapez kuralının çoklu uygulamasındaki tahmini hata, her bir aralıkta ilgili hataların toplanmasıyla elde edilir.

$$\bar{f}^{n} = \left[\sum_{i=1}^{n} f''(\zeta_i)\right]/n \ , \quad \sum_{i=1}^{n} f''(\zeta_i) = n\,\bar{f}''$$ dir.

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\zeta_i)$$ olduğunudan;

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\,\bar{f}''$$ → yaklaşık hatadır.

Bu formüle göre aralık sayısı iki katına çıkarsa kesme hatası 1/4 'e düşer.
Örnek: (S.631)

$f(x)=0.2+25x-200x^2+675x^3-900x^4+400x^5$

GD= 1.640533
x=0-0.8'e kadar integral
f(0)=0.2 , f(0.4)=2.456 , f(0.8)=0.232

$$I = 0.8\,\frac{0.2+2(2.456)+0.232}{4} = 1.0688$$

E_G=1.640533-1.0688=0.57173

ε_B=%34.9

$$E_y = -\frac{0.8^3}{12(2)^2}(-60) = 0.64$$

Bilgisayar Algoritması

a-) Bir aralık için

```
function Trap(h, f0,f1)
Trap=h*(f0+ f1)/2
end
```

b-) Çok aralık için

```
function Trapm(h,n,f)
dimension f(10)
top=f(0)
do i=1,n-1
top=top+ 2*f(i)
enddo
top=top-f(n)
Trapm=h*top/2
End
```

SİMPSON KURALLARI

Noktaları birleştirmek için yüksek dereceli polinomlar kullanılabilir.Örneğin $f(a)-f(b)$ arasında bir üçüncü nokta varsa, bu üç nokta bir **parabolle** birleştirilebilinir.

Bu polinomlar altında kalan alanların hesabı (integral alma) **simpson kuralları** diye bilinir.

<u>Simpson 1/3 kuralı</u>

$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_2(x)dx$ parabol denklemi ikinci derece **lagrange** polinomu ile ifade edilirse

$a = x_0$ ve $b = x_2$ olur.

$$I = \int_{x_0}^{x_2}\left[\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)\right]dx$$

bu integral alınırsa;

$I \cong \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]$ Simpson'un 1/3 kuralıdır ve Newton- Cotes kapalı integrali formülüdür.

Burada $h = \frac{b-a}{2} = \frac{x_2 - x_0}{2}$ dir.

$\left(\frac{1}{3}\right)$ tanımı h'nin 3'e bölünmesinden dolayı kullanılır.Alternatif bir yol olarak Newton-Gregory polinomunun integral edilmesiyle elde edilebilir.

Kesme hatası $E_k = -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi)$, h=(b-a)/2 , $E_k = \frac{-(b-a)}{2880} f^{(4)}(\xi)$ dür.

<u>Örnek</u> = $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4$ fonksiyonunun a=0 ve b=0.8 'e kadar sayısal integralini hesaplayınız.

<u>Çözüm</u>=

f(0)=0.2 , f(0.4)=2.456 ve f(0.8)=0.232

$I \cong 0.8\frac{(0.2+4*(2.456)+0.232)}{6} = 1.367467$ $E_k = \%16.6$

Trapez kuralında %80 doğrudur.($E_k = \%89.5$)

-1-

Simpson'un 1/3 Kuralının Çoklu Uygulaması

Trapez kuralında olduğu gibi integral aralığı eşit genişlikte küçük aralıklara bölünebilir.

$h = \frac{b-a}{n}$ $I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$

Her bir integral için Simpson'un 1/3 kuralı uygulanırsa;

$$I = (b-a)\left(\frac{f(x_0) + 4*\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2*\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}\right)$$

Aralık sayısı çift olmak zorundadır.

$E_a = \frac{-(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}$

<u>Örnek=</u> Bir önceki örneği n=4 ve h=0.2 için yapalım.

f(0)=0.2 f(0.2)=1.288 f(0.4)=2.456 f(0.6)=3.464 f(0.8)=0.232

$$I \cong 0.8\left(\frac{0.2+4*(1.288+3.464)+2*(2.456)+0.232}{12}\right)=1.623467$$

$$\varepsilon_t = 1.640533-1.623467=0.017067=\%1.04$$

$$E_a = \frac{-(0.8^5)}{180(h)^4}(-2400)=0.017067$$

Simpson yöntemi, trapez kuralından daha iyi sonuç vermektedir.Fakat, verinin eşit aralıklı olması gerekir.Ayrıca aralık sayısı çift ve dolayısıyla nokta sayısı tek olmalıdır.

Simpson'un 3/8 Kuralı

Tek aralık çift nokta sayısı olması durumunda 3. dereceden bir Lagrange polinomu 4 noktadan geçirilebilir ve integrali ;

$I=\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_3(x)dx$ 'dir . Bu integralin sonucu ise;

$$I=\frac{3h}{8}[f(x_*)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)]$$

h=$\frac{b-a}{3}$ 'tür. Bu formül Simpson'un 3/8 kuralı veya üçüncü Newton –Cotes kapalı integral formülüdür.

-2-

$I=(b-a)\frac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8}$ şeklinde yazılabilir.Uç noktalar 1/8 ağırlıklıyken iç noktalar 3/8 ağırlıklı olrak sonucu etkiler.

Hata $E_k=\frac{-3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi)$ veya $h=\frac{b-a}{3}$ $\Rightarrow$ $E_k=-\frac{(b-a)^5}{6480}f^{(4)}(\xi)$

<u>Örnek</u> =Simpson'un 3/8 kuralını kullanarak önceki örnekteki f(x) fonksiyonunu
a-) a=0 b=0.8 ' e kadar sayısal integralini hesaplayalım.

Çözüm=

f(0)=0.2 f(0.2667)=1.432724 f(0.5333)=3.487177 f(0.8)=0.232

$$I \cong 0.8\frac{0.2+3(1.432724+3.487177)+0.232}{8}=1.519170$$

$$E_k = 1.640533-1.519170=0.1213630$$

$$\varepsilon_t = \%7.4$$

$$E_a = -\frac{(0.8)^5}{6480}(-2400)=0.1213630$$

b-) 5 aralık kullanarak 1/3 ve 3/8 kuralı ile hesaplayalım.

Çözüm=

f(0)=0.2 f(0.32)=1.743393 f(0.64)=3.181929
f(0.16)=1.296919 f(0.48)=3.186015 f(0.8)=0.232

$$I \cong 0.8\frac{\left(0.2+4*(1.296919)+1.743393\right)}{6}=0.3803237$$

Son üç aralık

$$I \cong 0.48\frac{\left(1.743393+3*(3.186015+3.181929)+0.232\right)}{8}=1.264754$$

$$I=0.3803237+1.264753=1.645077$$

$$E_K=1.640533-1.645077=-0.00454383$$

$$\varepsilon_t=\%-0.28$$

Simpson Kuralları İçin Bilgisayar Programları (S-642)

Simpson kuraları birçok uygulama için yeterlidir.Doğruluk kuralarının çoklu uygulaması ile arttırılabilir.

-3-

EŞİT OLMAYAN ARALIKLA İNTEGRAL

Veriler eşit aralıklı değilse, trapez kuralı her bir aralıkta uygulanır ve sonuçlar toplanır.

$$I=h_1\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}+h_2\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+.....+h_n\frac{f(n-1)+f(n)}{2}$$

Burada h_i **-i-** aralığının genişliğidir.

Örnek= $f(x)=0.2+25x-200x^2+675x^3-900x^4+400x^5$

x	**f(x)**
0	0.2
0.12	1.3097
0.22	1.3052
0.32	1.7433
0.36	2.0749
0.40	2.4560
.	.
.	.

$$I=(x_2-x_1)\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+........$$

Düzensiz aralık hesabında eğer ard-arda iki aralık eşit ise bu aralıklar için Simpson Kuralı uygulanabilir.

Bilgisayar Programı(S-646)
Eğer iki aralık eşit ise Simpson 1/3 kuralı
Eğer üç aralık eşit ise Simpson 3/8 kuralı uygulanıyor.

AÇIK İNTEGRAL FORMÜLLERİ

Aralık sayısı ÇİFT
Nokta sayısı TEK } tercih edilir.

Açık integral , belirsiz integral için kullanılır veya integrallerin hesaplanmasıyla ;

$c_0 + c_1 = b - a$ ve $-c_0 \dfrac{b-a}{2} + c_1 \dfrac{b-a}{2} = 0$

Burada iki bilinmeyenli denklem elde edilir.Burada c_0 ve c_1 çözülürse,

$c_0 = c_1 = \dfrac{b-a}{2}$ bulunur. Bu değerler denklemde yerine konursa;

$I \cong \dfrac{b-a}{2} f(a) + \dfrac{b-a}{2} f(b)$ ‘dir. Bu da trapez kuralına eşdeğerdir.

- 4 -

İKİ NOKTALI GAUSS LEGENDRE FORMÜLÜNÜN TÜRETİLMESİ

Trapez kuralının türetilmesinde yapıldığı gibi
Gauss kareleme’nin amacı;

$$I \cong c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) \qquad (12)$$

şeklinde bir eşitliğin katsayılarını belirlemektedir. **c** ‘ler bilinmeyen katsayılardır.Fakat burada x_0 ve x_1 uç noktalarda değildir ve bilinmektedirler.Dolayısıyla (c_0, c_1, x_0, x_1) dört bilinmeyen vardır.Bunları çözmek için dört koşul gereklidir.

KATLI İNTEGRALLER

$$f = \frac{\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy}{(d-c)(b-a)} \longrightarrow \text{iki katlı integral}$$

*Önce dx’e bağlı integral sonrada dy olan integral hesaplanır.

__Örnek=__ Isıtılan dikdörtgen bir plakanın sıcaklığı aşağıdaki fonksiyonla tanımlansın ;

$T(x,y) = 2xy + 2x - x^2 - 2y^2 + 40$
Plaka x=8m uzunluğunda ve y=6m genişliğinde ise ortalama sıcaklığını hesaplayınız.

Bölüm 22= Eşitliklerin İntegrali

Sayısal integre edilecek fonksiyonlar
- Veriler Tablosu = Veri noktalarının şekli önemli.Veri sayısı sınırlı
- Fonksiyon

Analiz yapmak için 2 yöntem açıklanacak.

1-) Richardson Ekstrapolasyonu = İki sayısal integral tahminini birleştirerek daha iyi bir üçüncü değer elde etmede kullanılır.
Bunu etkili bir şekilde uygulayan bilgisayar algoritması **Romberg İntegrali'**dir.
Romberg integrali tekrarlamalı bir hesaplama şeklidir.Önceden belirlenen bir hata töleransı içinde kalan bir integral tahmininin elde edilmesi için kullanılır.

2-) Gauss Kareleme yöntemi = Newton-Cotes formülü için f(x)'in bilinen x - noktalarında hesaplanıyordu.Örneğin integral hesabında Trapez Kuralı kullanılıyorsa,integral sınırında f(x)'in ağırlıklı ortalamasını almak zorundayız.
Gauss-Kareleme formülleri ; a ve b arasında bulunan x-değerlerini daha doğru integral tahmini elde edecek şekilde seçerek kullanılır.
Eşitlikler için Newton-Cotes algoritmaları (s-654)

(a) (b)

-5 –

22.2 Romberg İntegrali

Sayısal integral için etkili bir tekniktir.Trapez kuralının ardışık bir uygulamasıdır.
Sayısal integral değerlerini düzeltmek için hata düzeltme teknikleri vardır.
Daha doğru 3. bir değer hesaplamak kullanılan bu yöntemlere **Richardson Ekstrapolasyonu** denir.

Trapez kuralının çoklu uygulamasında hata

$$I = I(h) + E(h) \qquad (1)$$

n adet aralık ve h=(b-a)/n aralık genişliği için tahmini sonuç

* h_1 ve h_2 aralık genişlikleri için iki farklı tahmin yaparsak ve hatanın kesin değerini biliyorsak,

$$I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2) \qquad (2)$$

Trapez kuralında yaklaşık hata $E \cong -\frac{b-a}{12} h^2 f''$

Eğer f'' değerinin adım büyüklüğüne bakılmaksızın , sabit olduğu varsayılırsa yukarıdaki eşitlik iki farklı hatanın oranını hesaplamak için kullanılabilir.

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} \cong \frac{(h_1)^2}{(h_2)^2} \qquad (3)$$

Böylece f'' terimi sadeleştirildi ve fonksiyonun 2. türevi ni bilmeden denklemdeki bilgiler kullanıldı.

$$E(h_1) \cong E(h_2)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$$

Bu denklem, (2.) denklem de yerine konulursa;

$$I(h_1) + E(h_2)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 = I(h_2) + E(h_2) \quad \text{olur.}$$

Bu eşitliğin çözümü ;

$$E(h_2) \cong \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2}$$

İki farklı adım büyüklüğü ve integral tahmini ile yeni bir kesme hatası formülü geliştirildi.

$$I = I(h_2) + E(h_2) \qquad (4)$$

\- **- 6 -**

İfadesinde denklemler yerine konursa ;

$$I = I(h_2) + \frac{1}{\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2}\left[I(h_2) - I(h_1)\right] \qquad (5)$$

Eşitliği elde edilir.Bu daha iyi bir integral tahmini formülüdür.Bu tahmindeki hatanın mertebesi $O(h^4)$ dür.Yukarıda $O(h^4)$ mertebesinde yeni bir tahmini , $O(h^2)$ mertebesinde iki farklı trapez kuralında elde edilen tahmini birleştirdik.Arlığın yarıya bölündüğü ($h_2 = \frac{h_1}{2}$) özel durumlarda bu eşitlik ;

$$I \cong I(h_2) + \frac{1}{2^2 - 1}\left(I(h_2) - I(h_1)\right) \cong \frac{4}{3} I(h_2) + \frac{1}{3} I(h_1) \qquad (6)$$

elde edilir.

<u>**Örnek=**</u> $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ ‘ in a=0 ve b= 0.8 aralığında intergral hesabı için çeşitli yöntemler kullanıldı.

Trapez kuralının tekli ve çoklu uygulaması sonucu

Aralıklar	h	integral	ε_T,%
1	0.8	0.1728	89.5
2	0.4	1.0688	34.9
4	0.2	1.4848	9.5

1. ve 2. aralıktaki integral tahminleri kullanılırsa,

$$I \cong \frac{4}{3}(1.0688) - \frac{1}{3}(0.1728) = 1.367467$$
$$E_G = 1.640533 - 1.367467 = 0.273067$$
$$\varepsilon_T = \%16.6$$

Bu sonuç diğer iki tahminden daha doğrudur.
2. ve 4. aralıklar kullanılırsa

$$I \cong \frac{4}{3}(1.4848) - \frac{1}{3}(1.0688) = 1.623467$$
$$E_G = 0.017067$$
$$\varepsilon_T = \%1.0$$

Bu örnekle trapez kuralı ile üç farklı aralık sayısı için eldec edilmiş integral degerleri ile iki yeni $O(h^4)$ hata mertebesinde iki yeni integral elde edildi.Bu iki integral tahmini $O(h^6)$ hata mertebesinde yeni bir değerin hesaplanmasında kullanılabilir.

Adım büyüklüğü ,ardışık olarak yarılanmasına dayalı trapez kuralının kullanıldığı durumlarda $O(h^6)$ doğrulukta integral hesabı

- 7 -

$$I = \frac{16}{15} I_m - \frac{1}{15} I_l$$

I_m ve I_l sırasıyla daha çok ve daha az doğru tahminlerdir.Benzer şekilde $O(h^8)$ doğruluğunda iki tahmin için iki adet $O(h^6)$ doğruluktaki tahminler birleştirilebilir.

$$I \cong \frac{64}{63} I_m - \frac{1}{63} I_l \qquad (7)$$

<u>Örnek</u>= Önceki örnekte iki $O(h^4)$ doğrulukta tahmin kullanılarak,

$$I \cong \frac{16}{15}(1.623467) - \frac{1}{15}(1.367467) = 1.640533$$

Bu sonuç yedi basamağa kadar kesin sonuçtur.

Romberg İntegrali Algoritması

Herbir ekstrapolasyonu eşitliğinde katsayıların toplamı birdir.Bu katsayılar, ağırlıklandırma faktörünü temsil eder.Daha doğru olan integralin katsayısı bağıl olarak büyür.Bu formül olarak;

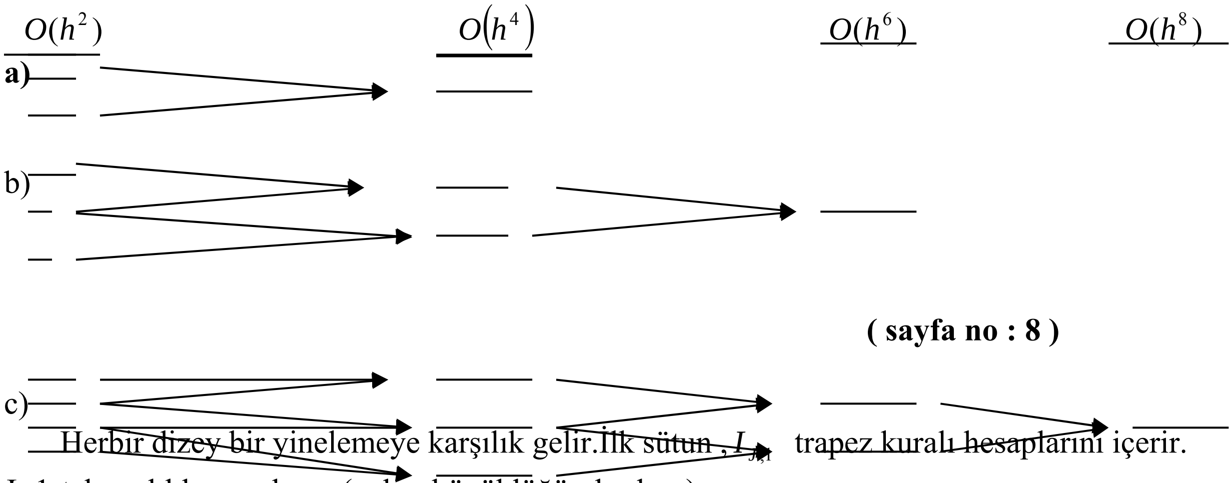
$$I_{i,j} \cong \frac{4^{k-1} I_{j+1;k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1} \qquad (8)$$

Burada $I_{j+1,k-1}$ ve $I_{j,k-1}$ sırasıyla daha çok ve daha az integral tahminidir.
k- indisi integrasyon aşamasıdır.k=41, orijinal trapez kuralı tahminlerine karşılık gelir.

k=2 $\longrightarrow O(h^4)$
k=3 $\longrightarrow O(h^6)$ ve v.b. karşılık gelir. j-indisi daha çok (j+1) ve daha az (j) doğru tahminleri belirtir.Örneğin ; k=2 ve k=3 için

$$I_{1,2} = \frac{4I_{2,1} - I_{1,1}}{3}$$

(8) eşitliği Romberg'e atfedilmiştir.Bunun uygulaması Romberg integrali olarak bilinir.



(sayfa no : 8)

Herbir dizey bir yinelemeye karşılık gelir.İlk sütun , $I_{j,1}$ trapez kuralı hesaplarını içerir.
J=1-tek aralıklı uygulama (adım büyüklüğü =h= b-a)
J=2-çift aralıklı uygulama (adım büyüklüğü=h=(b-a)/2)
J=3-dört aralıklı uygulama (adım büyüklüğü=h=(b-a)/4) v.b.'dir.

Hesaplamayı durdurma kriteri

$$|\varepsilon_a| = \left| \frac{I_{1,k} - I_{1,k-1}}{I_{1,k}} \right| * 100 ,[\%] \longrightarrow$$ bağıl hatanın bir tahminidir.

$\varepsilon_s \rightarrow$ bir sınır değer $\varepsilon_a < \varepsilon_s$ ise hesaplama durdurulur.

Sekil 22.4 Romberg integrali için programn (sayfa 660)

GAUSS KARELEME

Newton-Cotes formülleri ile sayısal integral veya karelemede veriler eşit aralıklı olmalıdır.Dolayısıyla bu formüllerde kullanılan temel noktaların konumları önceden belirlidir veya sabittir.
Örneğin, trapez kuralı ,integral aralığının uçları arasındaki fonksiyon değerler ini birleştiren düz doğrunun altında kalan alanın hesaplanması ilkesine dayanır.Bu alanı hesaplamada kullanılan formül ;

$I \cong (b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$ dir.

Trapez kuralı uç noktalardan geçmek zorunda olduğu için formül küçük hatalar verebilir.
Sabit temel nokta yerine, eğri üzerinde herhangi iki noktayı birleştiren düz bir doğrunun altında kalan alanı hesaplamakta serbest olalım.bu noktaların yeri akıllıca seçilirse, negatif ve pozitif alanları dengeleyen düz bir doğru tanımlayabiliriz.Böylece daha iyi bir integral tahmini elde edebiliriz.

Gauss kareleme , bu tür bir stratejiyi kullanan tekniklerden bir kısmına verilen addır. Bu bölümde tanımlanan özel Gauss kareleme formülleri,**Gauss Legendre formüller** diye adlandırılır.

Önce, trapez kuralı gibi sayıasl integral formüllerinin belirsiz katsayılar yöntemi kullanılarak nasıl türetildiğini göstereceğiz.Daha sonra bu yöntem Gauss-Legendre Formüllerini tütetmek için kullanılacak.

Belirsiz Katsayılar Yöntemi

Bu yaklaşımı göstermek için trapez kuralı ;

$I \cong c_0 f(a) + c_1 f(b)$ şeklinde yazılabilir.Burada c_0 ve c_1 sabittirler.Eğer integre edilicek fonksiyonun , düz bir doğru veya bir sabite , trapez kuralı kesin sonuç verir.Bu durum için iki örnek,
y= 1 ve y=x için ;

$c_0 + c_1 = \int_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2} 1dx$ ve $-c_0 \dfrac{b-a}{2} + c_1 \dfrac{b-a}{2} = \int_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2} xdx$

- 9 -

Trapez kuralı için yapıldığı gibi , bir sabitin ve bir doğrusal fonksiyonun integralini kesin vereceği varsayımıyla iki koşul elde edilir.

Ayrıca (12) eşitliğinin bir parabolün $(y = x^2)$ ve bir kübik polinomun $(y = x^3)$ integralinde kesin sonucu vereceği varsayılabilir.Böylece hem dört bilinmeyen hesaplanabilir hemde kübikler içinde kesin olan doğrusal iki noktalı integral formülünü türetebiliriz.Çözülmesi gereken dört denklem ;

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} 1dx = 2$$

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} xdx = 0$$

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$$

Bu dört eşitlik eş-zamanlı çözülürse ;
$c_0 = c_1 = 1$

$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0.05773503$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.05773503$

Bunlar (12) denkleminde yerine konulursa ;

$$I \cong c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Fonksiyonun $\left(\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ aralığındaki değerlerinin basit toplamı 3. dereceden doğrulukta bir integral tahmini verir.

İntegral sınırları (-1, 1) aralığında alınarak basitleştirildi.Diğer integral sınırlarını bu forma dönüştürmek için basit bir değişken dönüşümü yapılabilir.Bu amaçla orijinal değişken x- ile yeni değişken x_d arasında doğrusal bir ilişki olduğu varsayılabilir.

$$x = a_0 + a_1 x_d \qquad (18)$$

Eğer alt limit x= a , $x_d = -1$ ise ve bunlar yukarıdaki denklemde yerine konursa ;

$$a = a_0 + a_1(-1) \qquad (19)$$

Eğer üst limit x=b ve $x_d = 1$ ise

$$b = a_0 + a_1(1) \qquad (20)$$

ve bunlar (18) 'de yerine konulursa,

$x = \frac{(b+a)+(b-a)dx}{2}$ elde edilir.Bunun diferansiyeli alınırsa ;

- **- 10 –**

$$dx = \frac{(b-a)}{2} dx_d \qquad (24)$$

Bulunur.İntegral alınacak eşitlikte yukarıda bulunan x ,dx eşitliklerinde kullanılırsa, İntegralin değerini değiştirmeksizin integral aralığının dönüşümü sağlanır.

<u>Örnek</u>= iki noktalı Gauss-Legendre formülü

$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ 'in x=0 ve x= 0.8 aralığındaki integrali

$I \cong f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ile hesaplansın. $I_{GD} = 1.640533$

Önce integral sınırını (-1, 1) yapmak için değişken dönüşümü yapmalıyız.Bunun için a=0 b= 0.8 değerleri (23) ve (24) denklemlerinde kullanılırsa ;

$x = 0.4 + 0.4x_d$

$dx = 0.4dx_d$

Bunlar orijinal denklemde kullanılırsa ;

$$I = \int_{0}^{0.8} \left(0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[0.2 + 25(0.4 + 0.4x_d) - 200(0.4 + 0.4x_d)^2 + 675(0.4 + 0.4x_d)^3 - 900(0.4 + 0.4x_d)^4 + 400(0.4 + 0.4x_d)^5\right] dx$$

Dönüşümü yapılan fonksiyonun

$\frac{1}{\sqrt{3}}$ ' deki değeri = 0.516741

$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 'dekideğeri = 1.305837 'dir.

$I \cong 0.516741 + 1.305837 = 1.822578$

H=1.640533-1.822578

Bölüm 22 . 3 . 3 = **Çok Noktalı Formüller**

Aşağıdaki formda türetilebilirler.

$$I \cong c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + ... + c_{n-1} f(x_{n-1})$$

n=nokta sayısı
tablo 22.1 'de Gauss-Legendre formüllerinde kullanılan ağırlık faktörleri ,c'ler ve fonksiyon noktaları x'lerdir.
Örnek= (s.667) tablodaki katsayılarla 3 noktalı formül kullanılırsa

I= 0.5555556 f(-0.7745967) + 0.8888889 f(0) + 0.5555556 f(0.7745967) = 1.640533

- 11 -

Kesin sonucu verir.İntegral aralığı içinde eşit olmayan aralıklı noktalarda fonksiyonun Değerinin hesaplanması gerektiği için Gauss Kareleme tekniği fonksiyonun bilinmediği durumlarda uygun değildir.Dolayısıyla verilerin tablo şeklinde olduğu mühendislik problemlerinde uygulanamaz.Ancak ,fonksiyonun bilindiği durumda , bu yöntem çok etkilidir.
Örnek=Düşen paraşütçü probleminin Gauss –Karelemenin uygulanması

$$d = \frac{g * m}{c} \int_{0}^{10} \left[1 - e^{-(c/m)t}\right] dt = 289.4351$$

g=9.8 , c=12.5 , m=68.1

500 aralıkla trapez kuralı ile $|\varepsilon_t| \cong 1.15 * 10^{-4}$ hata ile 289.4348 bulunmuştu.Gauss-kareleme ile
İki nokta tahmini =290.0145
üç nokta tahmini =289.4393
dört nokta tahmini =289.4352
beş nokta tahmini =289.4351
altı nokta tahmini =289.4351 beş ve altı noktalı tahminler yedi basamağa kadar kesin olan

sonucu verir.

Gauss-Kareleme İçin Hata Analizi

Gauss-legendre formülünün hatası Carnahan V. D .(1969) tarafından aşağıdaki tanımlanmıştır.

$$E_t = \frac{2^{2n+3}\left[(n+1)!\right]^4}{(2n+3)\left[(2n+2)!\right]^3} f^{(2n+2)}(\xi)$$

n aralık sayısı (nokta sayısını bir eksiği)
$f^{(2n+2)}(\xi)$-değişken dönüşümünden sonra elde edilen fonksiyonun (2n+2) 'inci türevi
($(1 < \xi < -1)$)

n'nin artmasıyla ,yüksek dereceli türevlerin önemli oranda artmaması koşuluyla gauss-kareleme Newton-Cotes formüllerine göre daha iyi sonuç verir.Bu tabloda 22.1'de gösterilmiştir.
Problem 22.8 Gauss-Kareleme'nin zayıf kaldığı bgir durumu göstermektedir.Bu gibi durumlarda ya Simpso2un çoklu uygulaması ya da Romberg integrali tercih edilir.
Yinede mühendislik problemlerinin çoğunda Gauss-kareleme , integralleri hesaplamada etkili bir araçtır.

22.4 Belirsiz integraller

Mühendislik problemlerinde ,belirsiz integralleri de hesaplamak zorunda olabiliriz. Burada $(-\infty, \infty)$ aralığındaki belirsiz integrallerin hesabının göstereceğiz.

Bu tür integraller ,sonsuz integral sınırını ,sonlu bir değere çeviren bir değişken dönüşümüyle hesaplarız.Aşağıdaki eşitlik bu amaca hizmet eder. X-sonsuza yaklaşırken en azından $1/x^2$ kadar hızlı bir şekilde sıfıra doğru giden herhangi bir fonksiyon için işler.

- - 12 –

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{1/b}^{1/a} \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right)dt \qquad ab>0 \qquad \text{için} \qquad (27)$$

Dolayısıyla a>0 ve $b = \infty$ ise veya
$a = -\infty$ ve b<0 ise kullanılır.

İntegral sınırlarının $-\infty$'dan pozitif bir değere veya negatif bir değerden ∞'a olduğu durumlarda integral iki adımda hesaplanır.

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-A} f(x)dx + \int_{-A}^{b} f(x)dx \qquad (28)$$

Burada – A değeri, fonksiyonun en azında $1/x^2$ kadar hızlı bir şekilde asimptotik olarak Sıfıra yaklaşması için yeterli büyüklükte negatif bir değer olarak seçilir.
İntegral iki kısıma ayrıldıktan sonra , ilk kısım (27) denklemiyle hesaplanır.İkinci kısım ise Simpson'un 1/3 kuralı gibi bir Newton-Cotes formülü ile hesaplanır.

Denklem (27) ile bir eşitlik çözülürken , karşılaşılan bir problem ; dönüşüm yapılan fonksiyonun integral sınırlarından birisinde tekil olmasıdır. Bu sorunu aşmak için açık integral formülleri kullanılır.Açık integral formülleri integral aralığının uç noktalarındaki veriler olmaksızın integral hesaplanabilir.Bunun için **Tablo21.4** deki formüllerden birisi kullanılır.

Örneğin; Trapez kuralının çoklu uygulaması ve orta nokta kuralın birlikte kullanılarak integral değeri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = h\left[\frac{3}{2}f(x_1) + \sum_{i=2}^{n-2} f(x_i) + \frac{3}{2}f(x_{n-1})\right]$$

Şekil.8 Genişletilmiş orta nokta kuralı için veri noktalarının integral sınırına göre konumları

Ayrıca integral aralıklarından birinin açık olduğu durumlar için yarı açık formüller türetilebilir.Örneğin; alt sınırda açık ve üst sınırda kapalı olan bir integral aşağıdaki gibidir.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = h\left[f(x_{1/2}) + f(x_{3/2}) + ... + f(x_{n-3/2}) + f(x_{n-1/2})\right] \qquad (29\ .\ 1)$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = h\left[\frac{3}{2}f(x_1) + \sum_{i=2}^{n-2} f(x_i) + \frac{1}{2}f(x_n)\right] \qquad (29\ .\ 2)$$

(29 .1) daha çok tercih edilen formül olup genişletilmiş orta nokta formülü olarak bilinir.Bu formül ilk ve son veri noktasından sırasıyla h/2 kadar sonra ve önce olan integral sınırlarına dayanır.

Örnek=Belirsizbir integralin hesabı toplamalı normal dağılım istatistikte önemli bir formüldür.

- 13 -

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Burada $x = (y - \bar{y}) / s_y$ normalleştirilmiş standart sapma diye adlandırılır.

Bu bir değişkenin normal dağılım ölçeğine göre değişimini gösterir.Böylece ortalama sıfır noktasında konumlanır.Burada apsis boyunca uzaklıklar standart sapmanın katları olarak ölçülendirilir.(sayfa 670-paragraf-ekle)

Örnek= (28) eşitliği ve Simpson’un 1/3 kuralı ile N(1)=?

Çözüm= Eşitlik (28) formunda yazılırsa

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{-2} e^{\frac{-x^2}{2}} dx + \int_{-2}^{1} e^{\frac{-x^2}{2}} dx\right)$$

İlk integral (27) denklemi ile çözülürse ;

$$\int_{-\infty}^{-2} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{2} e^{\frac{-1}{(2t^2)}} dt$$

h=1/8 ile genişletilmiş orta nokta kuralı tahmin için kullanılırsa;

$$\int_{-1/2}^{0} \frac{1}{t^2} e^{\frac{-1}{2t^2}} dt \cong \frac{1}{8}\left[f\left(x_{\frac{-7}{16}} \right) + f\left(x_{\frac{-5}{16}} \right) + f\left(x_{\frac{-3}{16}} \right) + f\left(x_{\frac{-1}{16}} \right) \right] \cong \frac{1}{8}[0.3833 + 0.0612 + 0 + 0] = 0.0556$$

h=0.5 ile Simpson'un1/3 kuralını kullanarak 2. integrali çözersek;

$$\int_{-2}^{1} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = [1-(-2)] \frac{1.1353 + 4[0.3247 + 0.8825 + 0.8825 + 2(0.6065+1)] + 0.6065}{3(6)} = 2.0523$$

Böylece

$$N(1) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(0.0556 + 2.0523) = 0.8409 \qquad \varepsilon_t = \%0.046$$

Bu hesaplamada daha yüksek dereceli formül olan Romberg integrali uygulanabilir.Ayrıca daha fazla nokta kullanılarak daha hassas sonuç elde edilebilir.