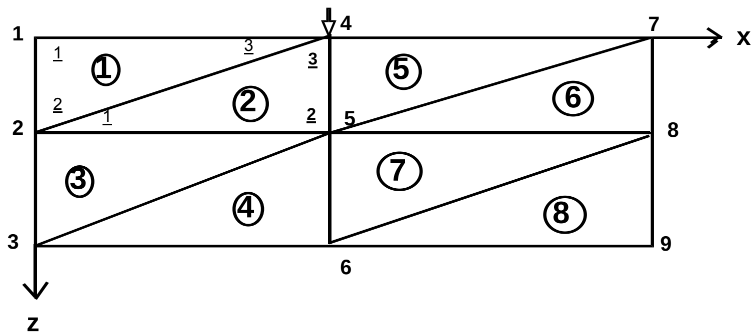
Genel Dizey Denkleminin (Global Matrix Equation) Elde Edilmesi

Elemanlar düğüm noktalarından birbirine bağlı olduğundan, düğüm noktalarındaki gerilimler bir eleman için yazılan dizey denkleminin çözümüyle bulunamaz. Gerilimlerin hesaplanması için elemanlar için oluşturulan dizey denklemleri, sonlu elemanlar ağına bağlı birleştirilerek genel dizey denklemi oluşturulmalıdır. Oluşturulan genel dizey denklemi çözülerek düğüm noktalarındaki gerilimler hesaplanır.

Denklem (2.4.23) sonlu elemanlar ağındaki bütün elemanlar için türetilebilir. Sonlu elemanlarda amaç bütün elemanların katsayı dizeylerini toplayarak, tüm yapının katsayı dizeyine dönüştürmektir. Bunu göstermek için Şekil 2.4.5 daki gibi (3×3) boyutunda bir sonlu elemanlar ağı ele alınabilir.



Şekil 2.4.5.Sekiz doğrusal üçgen eleman ve dokuz düğüm noktası olan sonlu elemanlar ağı.

Burada ağın 8 elemanı ve yukardan aşağıya doğru numaralandırılmış 9 düğüm noktası vardır.Yukardaki sonlu elemanlar ağında bütün elemanlar için (2.4.23) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & \quad 2 & \quad 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_1^{\,1} \\ \tilde{\phi}_2^{\,1} \\ \tilde{\phi}_3^{\,1} \end{bmatrix} = I_\Delta \begin{bmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ a_3^1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 \\ k_{21}^2 & k_{22}^2 & k_{23}^2 \\ k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_1^{\,2} \\ \tilde{\phi}_2^{\,2} \\ \tilde{\phi}_3^{\,2} \end{bmatrix} = I_\Delta \begin{bmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ a_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11}^3 & k_{12}^3 & k_{13}^3 \\ k_{21}^3 & k_{22}^3 & k_{23}^3 \\ k_{31}^3 & k_{32}^3 & k_{33}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_1^{\,3} \\ \tilde{\phi}_2^{\,3} \\ \tilde{\phi}_3^{\,3} \end{bmatrix} = I_\Delta \begin{bmatrix} a_1^3 \\ a_2^3 \\ a_3^3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} k_{11}^4 & k_{12}^4 & k_{13}^4 \\ k_{21}^4 & k_{22}^4 & k_{23}^4 \\ k_{31}^4 & k_{32}^4 & k_{33}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_1^{\,4} \\ \tilde{\phi}_2^{\,4} \\ \tilde{\phi}_3^{\,4} \end{bmatrix} = I_\Delta \begin{bmatrix} a_1^4 \\ a_2^4 \\ a_3^4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11}^5 & k_{12}^5 & k_{13}^5 \\ k_{21}^5 & k_{22}^5 & k_{23}^5 \\ k_{31}^5 & k_{32}^5 & k_{33}^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_1^{\,5} \\ \tilde{\phi}_2^{\,5} \\ \tilde{\phi}_3^{\,5} \end{bmatrix} = I_\Delta \begin{bmatrix} a_1^5 \\ a_2^5 \\ a_3^5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} k_{11}^6 & k_{12}^6 & k_{13}^6 \\ k_{21}^6 & k_{22}^6 & k_{23}^6 \\ k_{31}^6 & k_{32}^6 & k_{33}^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_1^{\,6} \\ \tilde{\phi}_2^{\,6} \\ \tilde{\phi}_3^{\,6} \end{bmatrix} = I_\Delta \begin{bmatrix} a_1^6 \\ a_2^6 \\ a_3^6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11}^7 & k_{12}^7 & k_{13}^7 \\ k_{21}^7 & k_{22}^7 & k_{23}^7 \\ k_{31}^7 & k_{32}^7 & k_{33}^7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_1^{\,7} \\ \tilde{\phi}_2^{\,7} \\ \tilde{\phi}_3^{\,7} \end{bmatrix} = I_\Delta \begin{bmatrix} a_1^7 \\ a_2^7 \\ a_3^7 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} k_{11}^8 & k_{12}^8 & k_{13}^8 \\ k_{21}^8 & k_{22}^8 & k_{23}^8 \\ k_{31}^8 & k_{32}^8 & k_{33}^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_1^{\,8} \\ \tilde{\phi}_2^{\,8} \\ \tilde{\phi}_3^{\,8} \end{bmatrix} = I_\Delta \begin{bmatrix} a_1^8 \\ a_2^8 \\ a_3^8 \end{bmatrix}$$

Yukardaki dizey denklemlerinde görüldüğü gibi, bir eleman üzerinde üç düğüm noktası olduğundan katsayı dizeyleride (3×3) boyutundadır. Bu dizeyleri birleştirerek tüm ağın katsayı dizeyi haline getirmek için düğüm noktası sayısı boyutunda (9×9) bir kare dizeye gereksinim vardır. Katsayı dizeyini oluşturarak genel dizey denklemini elde etme işlemine "Doğrudan Rijitlik Yöntemi" denir. Burada bir elemana ait dizey denkleminde dizey ve vektörün satır ve sütun numarası (sonlu elemanlar ağında elemanın düğüm noktalarının numarası), dizey ve vektörün kenarlarına yazılır. Sonra sonlu elemanlar ağındaki düğüm noktası sayısı boyutunda bir kare dizey (katsayı dizeyi, coefficient- stiffness matrix) oluşturulur ve dizeyin bütün elemanlarına sıfır değeri atanır. Bundan sonra, her eleman için yazılmış denklemlerde dizeyin kenarına yazılan düğüm noktası numarası, katsayı dizeyinin satır ve sütun numarası olacak şekilde değerler yerleştirilir. Aynı satır ve sütun numarasına denk gelen değerler toplanır. Bu işlem bütün elemanlar için yapılır. Numaralandırma işlemi 1 numaralı eleman için yazılan dizey denkleminde görülmektedir. Sırasıyla 1, 2, 3, ..., 8 elemanlarının sonlu elemanlar ağı için yazılacak dizey denklemine nasıl katıldığı Ek-D de verilmiştir. İlk üç elemanın sonlu elemanlar ağı için yazılan denkleme katkısı aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & k_{13}^1 & 0 & 0\;0\;0\;0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 + k_{11}^3 & k_{12}^3 & k_{23}^1 + k_{13}^2 & k_{12}^2 + k_{13}^3 & 0\;0\;0\;0 \\ 0 & k_{21}^3 & k_{22}^3 & 0 & k_{23}^3 & 0\;0\;0\;0 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 + k_{31}^2 & 0 & k_{33}^1 + k_{33}^2 & k_{32}^2 & 0\;0\;0\;0 \\ 0 & k_{21}^2 + k_{31}^3 & k_{32}^3 & k_{23}^2 & k_{33}^3 + k_{22}^2 & 0\;0\;0\;0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\;0\;0\;0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\;0\;0\;0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\;0\;0\;0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\;0\;0\;0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^1 \\ \phi_2^1 + \phi_1^2 \\ \phi_2^2 + \phi_1^3 \\ \phi_3^1 + \phi_3^2 + \phi_2^3 \\ \phi_3^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1^1 \\ s_2^1 + s_1^2 \\ s_2^2 + s_1^3 \\ s_3^1 + s_3^2 + s_2^3 \\ s_3^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Yukardaki dizey denklemi bütün elemanların katkısı toplanarak,

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & 0 & K_{35} & K_{36} & 0 & 0 & 0 \\ K_{41} & K_{42} & 0 & K_{44} & K_{45} & 0 & K_{47} & 0 & 0 \\ 0 & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{47} & K_{58} & 0 \\ 0 & 0 & K_{63} & 0 & K_{65} & K_{66} & 0 & K_{68} & K_{69} \\ 0 & 0 & 0 & K_{74} & K_{75} & 0 & K_{77} & K_{78} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{85} & K_{86} & K_{87} & K_{88} & K_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{96} & 0 & K_{98} & K_{99} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \\ \phi_8 \\ \phi_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ S_8 \\ S_9 \end{bmatrix} \qquad (2.4.25)$$

şeklinde yazılabilir. Burada; $K_{11} = k^1{}_{11}$, $K_{12} = k^1{}_{12}$, $K_{13} = 0, ...,$ $K_{21} = k^1{}_{21}$, $K_{22} = k^1{}_{22} + k^2{}_{11} + k^3{}_{11}$, ..., $\phi_1 = \phi_1^1$, $\phi_2 = \phi_2^1 + \phi_1^2$, ..., $S_1 = S_1^1$, $S_2 = S_2^1 + S_1^2$,... e eşittir. Buna göre (2.4.25) dizey denklemi genel olarak tanımlanan bir sonlu elemanlar ağı için aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$K_{(N \times N)} . U_{(N \times 1)} = S_{(N \times 1)} \qquad (2.4.26)$$

Burada N ağ üzerindeki düğüm noktası sayısı olmak üzere, (2.4.26) denkleminde $K \quad (N \times N)$ boyutlu, pozitif değerli, simetrik-band dizeydir. Bu dizey sonlu elemanlar ağındaki tüm elemanların geometrisine ve öziletkenliğine bağlıdır. Dizeyin köşegen (diagonal) elemanları sıfırdan $(K_{i,i} > 0)$ ve aynı sıradaki köşegen dışı terimlerden büyüktür. Dizeyde sıfır olmayan terimler köşegene yakındır ve bandın dışındaki bütün terimler sıfırdır.

U sütun vektör bütün düğüm noktalarındaki bilinmeyen gerilim değerlerini içerir. S sütun vektör ise bütün düğüm noktalarındaki nokta akım kaynağının değerini içermektedir.

Denklem (2.4.24) de görüldüğü gibi tek bir eleman için düğüm noktasında hesaplanan gerilim sadece o elemanın katkısıyla bulunur. Fakat sonlu elemanlar ağı üzerindeki bir düğüm noktasının gerilimi, denklem (2.4.25) ile o düğüm noktasına komşu tüm elemanların katkısıyla hesaplanır. Bu nedenle sonlu elemanlar ağındaki elemanların şekli ve düğüm noktası sayısı önemlidir. Sonlu elemanlar ağı üzerinde düğüm noktası sayısı ne kadar çok ise hesaplanan gerilimler modeli o kadar iyi temsil eder.

Şekil 2.4.6' da görüldüğü gibi 4 numaralı düğüm noktasında nokta akım kaynağı varsa (2.4.25) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & 0 & K_{35} & K_{36} & 0 & 0 & 0 \\ K_{41} & K_{42} & 0 & K_{44} & K_{45} & 0 & K_{47} & 0 & 0 \\ 0 & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{47} & K_{58} & 0 \\ 0 & 0 & K_{63} & 0 & K_{65} & K_{66} & 0 & K_{68} & K_{69} \\ 0 & 0 & 0 & K_{74} & K_{75} & 0 & K_{77} & K_{78} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{85} & K_{86} & K_{87} & K_{88} & K_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{96} & 0 & K_{98} & K_{99} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \\ \phi_8 \\ \phi_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ S_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.4.27)$$

Yukarda görüldüğü gibi S vektöründe sadece dördüncü düğüm noktasını temsil eden elemanda değer vardır. Böylece kaynağın olduğu yerde Poisson denklemi sağlanmış olur. Diğer elemanlara sıfır değeri atayarak kaynağın olmadığı noktalarda Laplace denklemi sağlanmış olur. Ayrıca her düğüm noktası için yazılan denklemlerde düğüm noktasının komşu olmadığı noktalar için sıfır değeri atayarak sınırlarda Drichlet sınır koşulu uygulanmış olur.