Gerilim Alanın Çözümü

(2.3.14) ve (2.4.26) dizey denklemlerinde kaynak terimini içeren sütun vektörlerin sıfırdan farklı elemanları olduğundan homojen olmayan denklem takımıdırlar. Homojen olmayan denklem takımlarının çözümü dolaysız (direct) ve dolaylı (indirect, iterative) yöntemler olarak ikiye ayrılabilir. Bu yöntemler için Aktaş ve diğ.' ne (1981) bakılabilir.

Dolaylı yöntemler hem algoritmalarının kolayca programlanabilir olması hem de yuvarlatma hatalarının az ve yineleme (iterasyon) yapıldıkça birikme olmaması bakımından çok kullanılır. Fakat bu yöntemlerde daima bir yakınsama (convergence) problemi vardır. Dolaysız yöntemler verilen katsayı dizeyinin elemanlarını işlemler sırasında değiştirirler ve başlangıçta çok sıfırlı (sparse) olan katsayı dizeyi sıfır elemanları daha az olan bir yoğun (dense) dizeye dönüşür. Buna karşılık dolaylı yöntemler katsayı dizeyini değiştirmez. Bu nedenle büyük (N > 100) ve çok sıfırlı katsayı dizeyi olan denklem takımlarının çözümü için dolaylı yöntemlerin kullanılması önerilir. Fakat bu yöntemler çözüme yakınsamazsa dolaysız yöntemlerin kullanılması zorunludur.

Aslında (2.3.14) ve (2.4.26) denklemlerinde, doğrudan katsayı dizeyinin tersi alınarak diğer tarafa çarpan olarak geçirilebilir ve çözüm daha hassas şekilde doğrudan bulunabilir. Fakat bu yöntem diğer dolaylı ve dolaysız çözüm yöntemlerinden daha fazla zaman alır. Yine de hızlı bir bilgisayar varsa bu yöntem ile çözüm tercih edilebilir.

Doğrusal cebirsel denklem takımının çözümünde kullanılacak yöntemin seçiminde; çözüm sırasında gereken işlem sayısı, çarpma ve bölme işlemleri sayısı, kolay programlanabilir olması, mümkün olduğu kadar az yuvarlatma hatası olması ve çözüm hızı özellikleri gözönünde tutulur.

Temsili bir ağ için kurulan (2.3.14) ve (2.4.26) dizey denklemlerinde genel olarak $(n \times m)$ düğüm noktası olan bir model için incelenirse, özdirenç dizeyi $(N \times N)$ elemanlı olur $(N = n \times m)$. Bu durumda dizey denklemi,

$$\sum_{j=1}^{N} r_{i,j}\phi_{i,j} = b_i \ , \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N \tag{2.5.1}$$

şeklinde gösterilebilir.

Özdirenç dizeyinin, aşağıdaki dört özelliği bulunmaktadır .

(i) $\mathrm{r}_{i,i} > 0, \quad i = 1,2,\ldots,N$

(ii) $r_{i,i} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{MN} \left|r_{i,j}\right|, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,N$

$(iii)\, R$, dizeyi indirgenemez ve elemanları kuvvetli bir biçimde birbiriyle ilişkilidir (Varga 1962).

$(iv)\ R$, Young' ın (1952) A tipi özelliğini bulundurmalıdır (Dey ve Morrison1979).

Varga (1962) fark denklemlerinin keyfi hücre aralıklarında yazılması sonucu, R dizeyinin özelliklerini göstermiştir. (2.3.14) denklemi yukardaki (i) ve (ii) koşullarının sağlanması durumunda "succesive overrelaxiation" yaklaşımı ile çözülebilir (Young,1962). Bu denklemin çözümünde ağ içinde elemanlarda tanımlanan özdirençler fiziksel olabilirlik şartını $(0 < \rho_{i,j} < \infty, (i,j) \in G \cup \Gamma)$ sağlamalıdır. Analitik yaklaşımlarda basitlik açısından kullanılan $\rho_{i,j} = 0$ veya $\rho_{i,j} = \infty$ yaklaşımları burada kullanılamaz. Çünkü jeolojik yapı hiçbir zaman sonsuz iletken ya da sonsuz yalıtkan değildir.

Özdirenç dizeyinin özelliklerine göre farklı kişiler, farklı çözüm yöntemleri kullanarak (2.3.14) ve (2.4.26) dizey denklemlerini çözmüştür.

Denklem (2.4.26) yı, Coggon (1971) ikincil alan yaklaşımı ile çözmüştür. Pridmore ve diğ. (1981) dolaylı yöntemlerden olan SOR (Successive Over Relaxation) yöntemini kullanmışlardır. Uchida (1992), Molano ve diğ. (1990) dolaylı yöntemlerden olan Cholesky Decomposition yöntemini kullanmışlardır.

Sonlu fark işleci kullanılarak elde edilen (2.3.14) dizey denklemini Dey ve Morrison (1979) dolaysız yöntemlerden olan Cholesky decomposition yöntemi ile çözmüştür.

SFY de; katsayı dizeyi noktalarla ayrıklaştırma sonucu, $\pm x$ ve $\pm z$ yönlerinde eşit olmayan aralıklarda kullanılırsa, katsayı dizeyinin simetrik olmadığı herhangi bir $\sigma(x,z)$ dağılımı için görülmüştür. Eğer dizey alanda ayrıklaştırma ile oluşturulur ve x,z yönlerinde genişleyen aralıklarda seçilirse, dizeyin elemanları pozitif ve simetriktir (Dey ve Morrison 1979). Dizey elemanları dx, dz ve iletkenliğin fonksiyonudur. Bu nedenle elemanların pozitif olması fiziksel olarak olabilirlik şartını sağlamaktadır.

Katsayı dizeyi simetrik ve sınırlı değilse, sonlu farklarda $R.\phi = b$ (veya sonlu elemanlarda $K_{(N\times N)}.U_{(N\times 1)} = S_{(N\times 1)}$) denklem sistemi en iyi Gauss eliminasyonu yöntemi ile çözülebilir. Katsayı dizeyi alanda ayrıklaştırma ile oluşturulduğunda simetrik ve bütün elemanları pozitif olduğundan, en iyi "Cholesky decomposition" yöntemi ile çözülmektedir (Martin and Wilkinson 1965).

Bu tez çalışmasında Sonlu Farklar ile modelleme için Dey' in (1976) programı, sonlu elemanlar ile modelleme için ise Uchida' nın (1995) 2-B ters çözüm programından modelleme yapan bölüm ayrılarak kullanılmıştır. Her iki program, gerilim değerlerinin hesaplanmasında Cholesky Decomposition yöntemini kullanmaktadır.

" Cholesky decomposition" yöntemine göre, herhangi bir A dizeyinin elemanları, pozitif ve simetrik ise bu dizey

$$LL^T = A \qquad (2.5.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada L dizeyi alt üçgen dizeyi, L^T ise L dizeyinin devriğini göstermektedir. L dizeyinin köşegen elemanları 1 dir. Burada,

$$L_{i,j} = 0 \quad (\mathrm{i - j > m})$$

$$L_{i,j}{}^T = L_{i,j}$$

dir. Buna göre Ax=b denklemi aşağıdaki şekilde adım adım

$$Ly = b \qquad (2.5.3)$$

$$L^T x = y \qquad (2.5.4)$$

çözülür. (2.5.3) denkleminde ilk önce y çözülür ve daha sonra (2.5.4) de yerine konularak x bilinmeyen yöneyi bulunabilir. Bu yöntem özellikle n veri sayısı m parametre sayısından büyük olduğu (n>>m) durumlarda (alt üçgenlere bölme yöntemi) etkilidir. Burada ele alınan problem için veri sayısı parametre sayısından fazladır. Bu yöntem Gauss eliminasyon yönteminden çok daha çabuk çözüme ulaşmaktadır (Dey ve Morrison 1979).

2.6. Gerilimin (x, k_y, z) Uzayından (x, y, z) Uzayına Dönüştürülmesi

(x,k_y,z) uzayından, (x,y,z) uzayına dönüşüm ile 2-B iletkenlik dağılımı nedeni ile oluşan üç boyutlu gerilim dağılımı hesaplanabilir. Dönüşüm işlemi Fourier cosinus dönüşümü ile gerçekleştirilebilir. (2.3.14) ve (2.4.26) dizey denklemlerinden hesaplanan gerilimler ($\tilde{\phi}\,(x,k_y,z)$); (x,k_y,z) uzayında çözülmüştür. Bu değerlerin (x,y,z) uzayına dönüştürülmesi gerekmektedir. Dönüşüm işleminde kullanılan k_y nin seçimi deneme yanılma yolu ile yapılmaktadır. Bu değerler sıfır ile dört arasında seçilerek gerçekleştirilebilir. Fakat herhangi bir yer modeli için ağ boyutunun değişmesi (dx ve dz aralıklarının değişmesi) yeni k_y değerlerinin bulunmasını gerektirmektedir. Ayrıca aynı model için her farklı AB/2 değeri içinde k_y değerlerinin yeniden düzenlenmesi gerekmektedir. Eğer modelin sadece iletkenlik değerleri değişirse aynı k_y değerleri ile anomali hesabı yapılabilir. k_y değerleri deneme yanılma yöntemi ile bulunarak homojen bir model için doğru olup olmadığı bütün AB/2 değerlerinde kontrol edilmelidir. k_y değerlerinin kaç adet olması bir kurala bağlı değildir. Örneğin, Dey ve Morrison (1979) yaptıkları programda beş adet, Rodi(1976) yedi adet, Uchida (1995) ise ondört adet k_y değeri kullanmıştır. Uchide k_y değerlerini ağ boyutuna bağlı olarak tanımlamıştır. Her modelde $\tilde{\phi}\,(x,k_y,z)$ genel davranışı k_y =0 için asimptotik olarak düz bir tepki fonksiyonuna, k_y nin en büyük değeri için düzgün azalarak sıfıra asimptot olmaktadır. Dönüşüm işlemi $\tilde{\phi}\,(x,k_y,z)$ yi uygun bir üstel fonksiyona yaklaştırılarak $\tilde{\phi}\,(x,k_y,z)$ nin zarfını k_y' nin değerleri için $(k_{y1} \le k_y \le k_{y2})$ analitik olarak

$$\int_{k_{y1}}^{k_{y2}} e^{-ak_y}\cos(k_y b)\,dk_y = \frac{e^{-ak_y}}{a^2+b^2}\left[b\sin(bk_y) - a\cos(bk_y)\right]\Big|_{k_{y1}}^{k_{y2}}$$

ile yapılabilir. Çözülen $\tilde{\phi}\,(x,k_y,z)$ ler $\phi\,(x,y,z)$ ye dönüştürüldükten sonra görünür özdirenç değerleri hesap edilebilir. Gerilim değerleri hesap edilirken farklı kaynak konumları için çözülen dizeyin yüzeye karşılık gelen elemanları daha sonra kullanılmak üzere saklanır.

(2.3.14) ve (2.4.26) dizey denklemlerinde gerilimin hesaplandığı düğüm noktasıyla ilişkisi olmayan düğüm noktalarına karşılık gelen sütunlara sıfır değeri atanır. Bu durumda köşelerde Dirichlet sınır koşulu sağlanmış olur. Ayrıca nokta akım kaynağını içeren dizeyde kaynağın bulunmadığı noktalara sıfır atamakla Laplace denklemi, nokta akım kaynağında ise Poisson denklemi sağlanmış olur (Pekşen 1996).

Denklem (2.3.14) ve (2.4.26) de katsayı dizeyi bir model için bir kez kurulur. Daha sonra nokta kaynak teriminin değişik konumları için bu denklem sistemi çözülerek istenilen modelin yeryüzünde oluşturacağı gerilim değerleri hesaplanabilir.