Ankara Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi, Fizik Mühendisliği Bölümü

FZM207

Temel Elektronik-I

Prof. Dr. Hüseyin Sarı

3. Bölüm:

Temel Devre Tepkileri-1

3. Bölüm: Temel Devre Tepkileri

İçerik

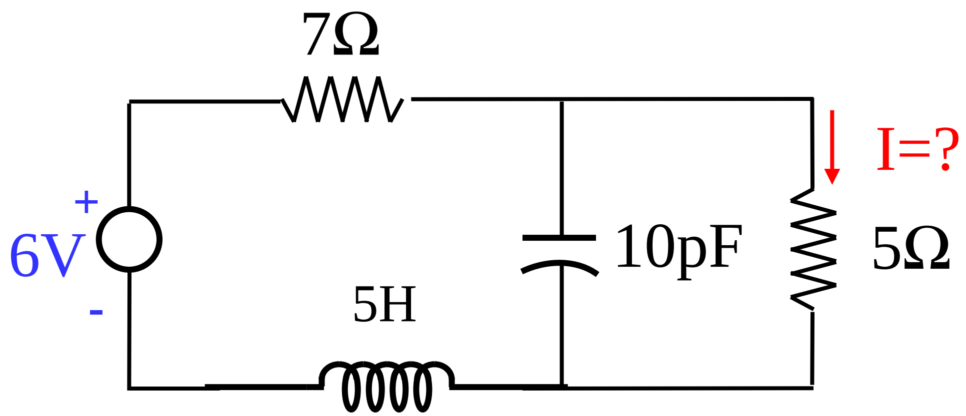
- Devre Tepkilerinin Özelliği
- Doğal Tepki
- Daha Karmaşık Devrelerin Doğal Tepkisi
- Zorlanmış Tepki
- Başlangıç Koşulları
- Tam Tepki

Bu derste,

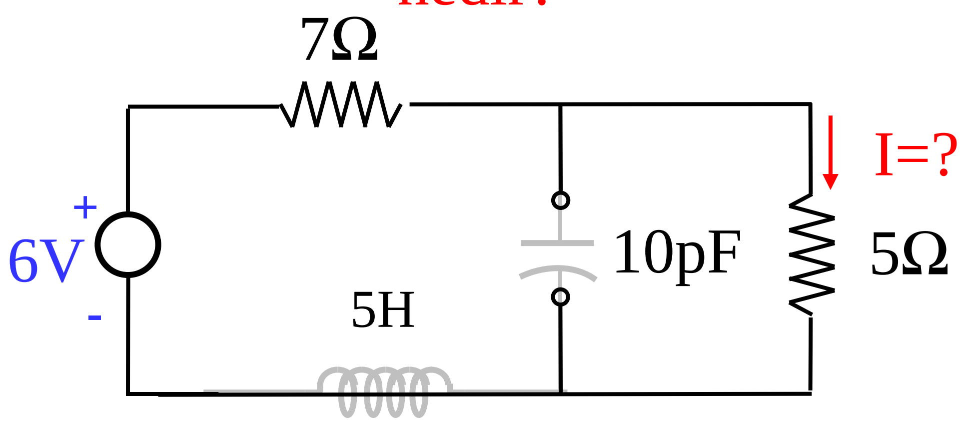
- Zamanla değişen akım ve gerilimlerin devrede oluşturacağı anlık tepkiler,
- Doğal tepki ve zorlanmış tepkiler

öğrenilmiş olacak.

Devre Tepkileri



5Ω direnç üzerinden geçen akım nedir?



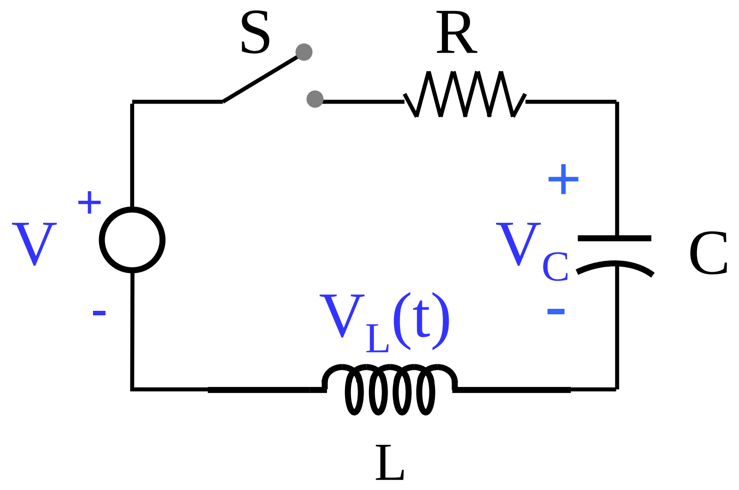
$$I = \left(\frac{6V}{12\Omega}\right) = 0.5A$$

Devre Tepkileri

Bu derste, zamanla değişen akım ve gerilim kaynaklarının devrelere uygulanması halinde devrenin göstereceği tepkiler incelenecektir. Özellikle ansızın uygulanan veya birden değiştirilen kaynağa gösterilen tepkiler incelenecektir.

Sığa üzerindeki akım

$$i(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$



Bobin üzerindeki gerilim

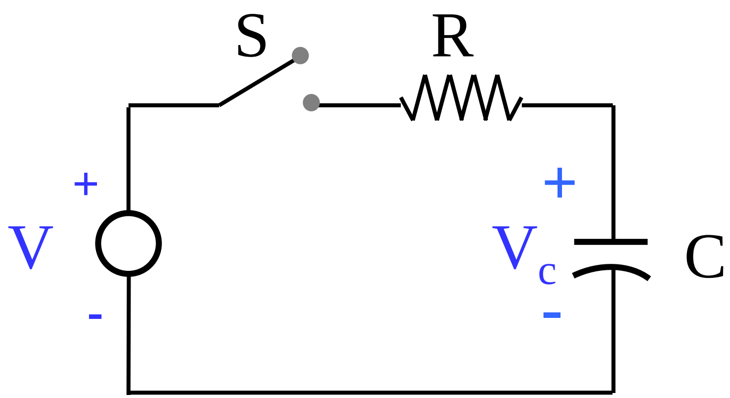
$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

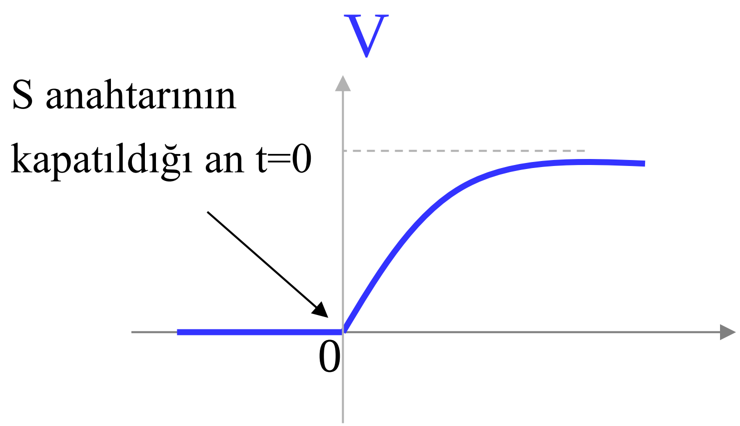
$V_C(t)$=? $V_L(t)$=?

Bu devre elemanlarının (Sığa ve bobin) üzerindeki akım ve gerilim, akım ve gerilimin büyüklüğü ile ilgili değil, değişimi ile orantılıdır.

Devre Tepkilerinin Özelliği

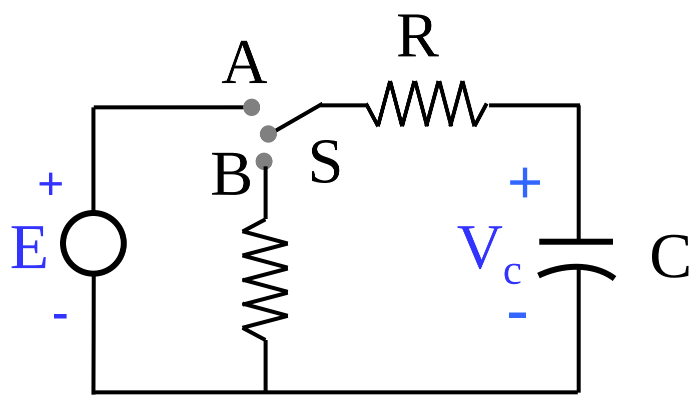
Devre tepkisinin genel özellikleri aşağıdaki R direnci ve C sığasından oluşan devrenin incelenmesi ile açıklanacaktır. S anahtarının t=0 anına kadar açık ve C sığasının yüklenmemiş olduğunu varsayalım. t=0 anından önce hiçbir şey olmamaktadır, devrede akım yoktur. Devre kararlı bir durumdadır.

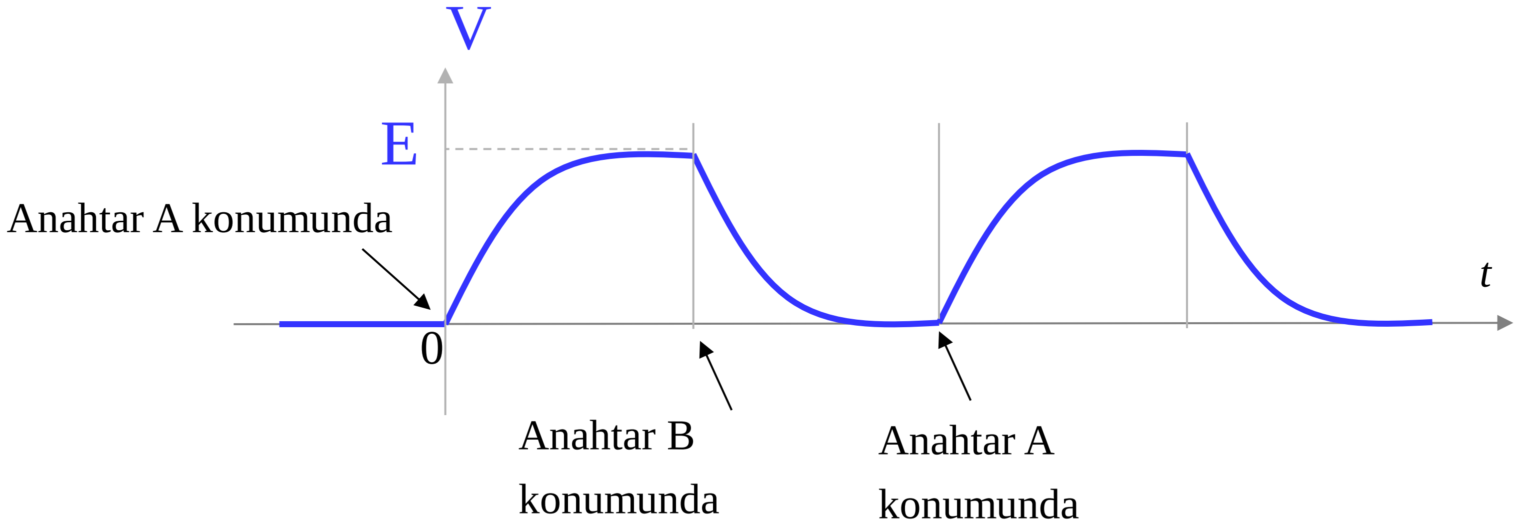


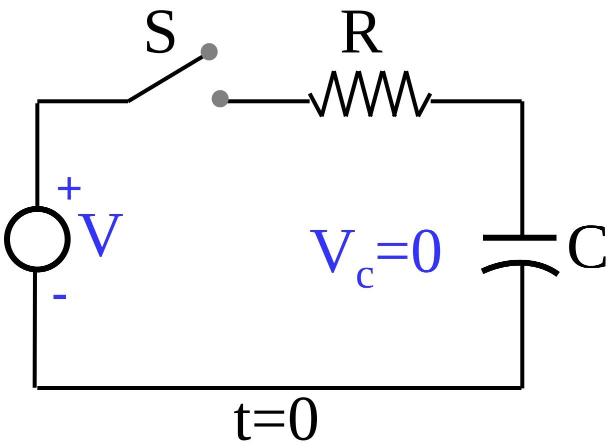


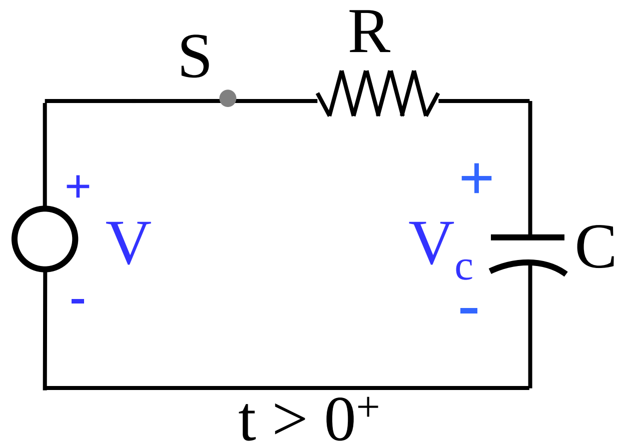
t=0 anında anahtar kapatılırsa koşullar değişmeye başlar. Kaynaktan çıkan yükler devre üzerinden akarak sığaya ulaşır; bu akış, sığa üzerindeki gerilim kaynak gerilimine eşit oluncaya (V_C=V) kadar sürer; yeni bir denge kurulur ve yüklerin akışı durur.

Devre Tepkilerinin Özelliği

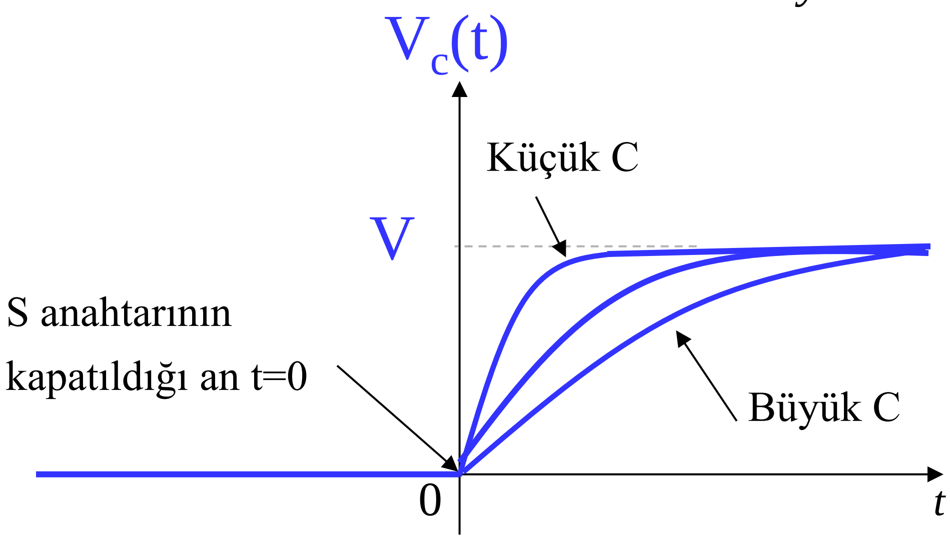


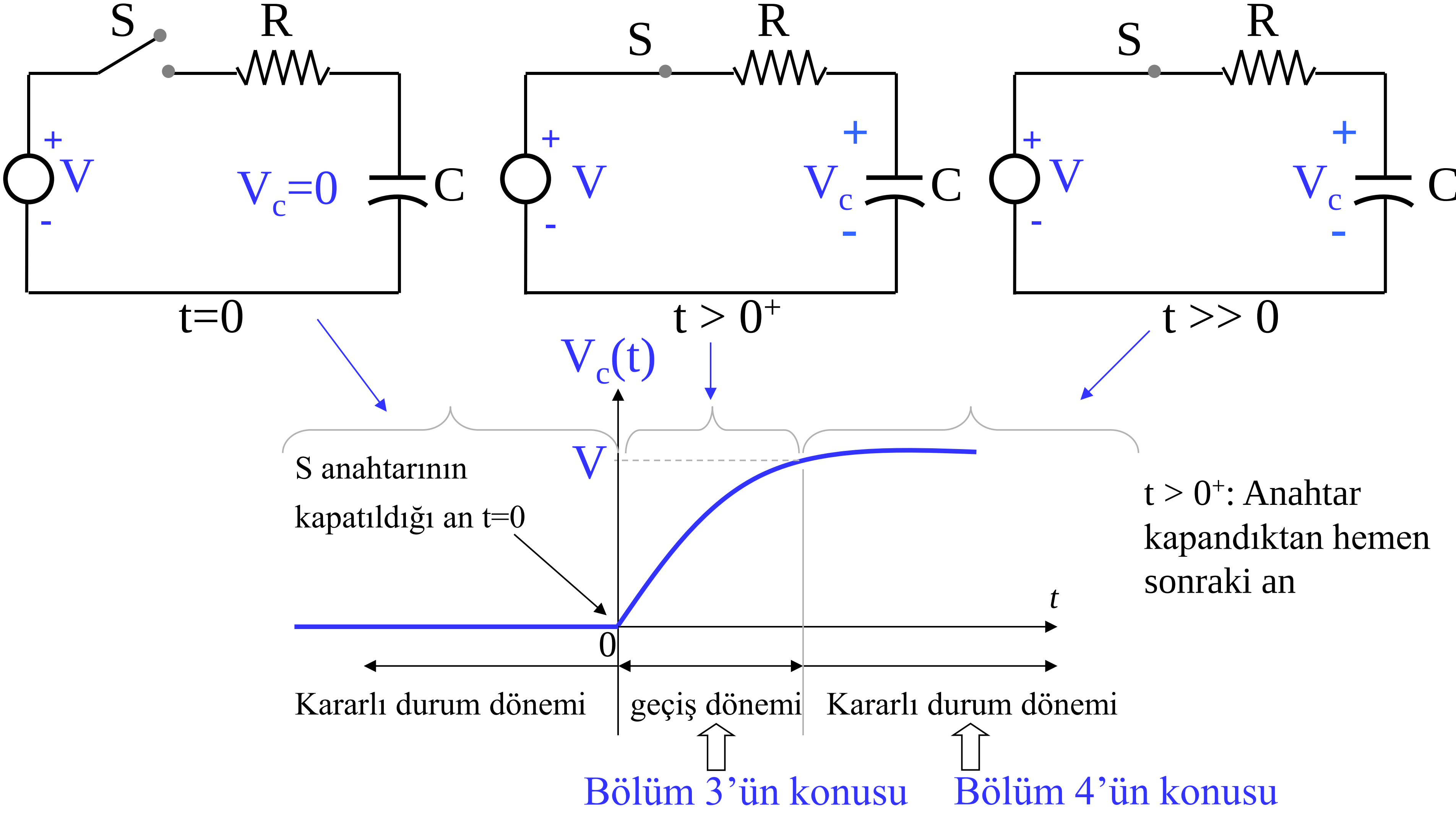






Bu geçiş dönemi devre elemanlarına bağlı olarak uzun veya kısa olabilir.

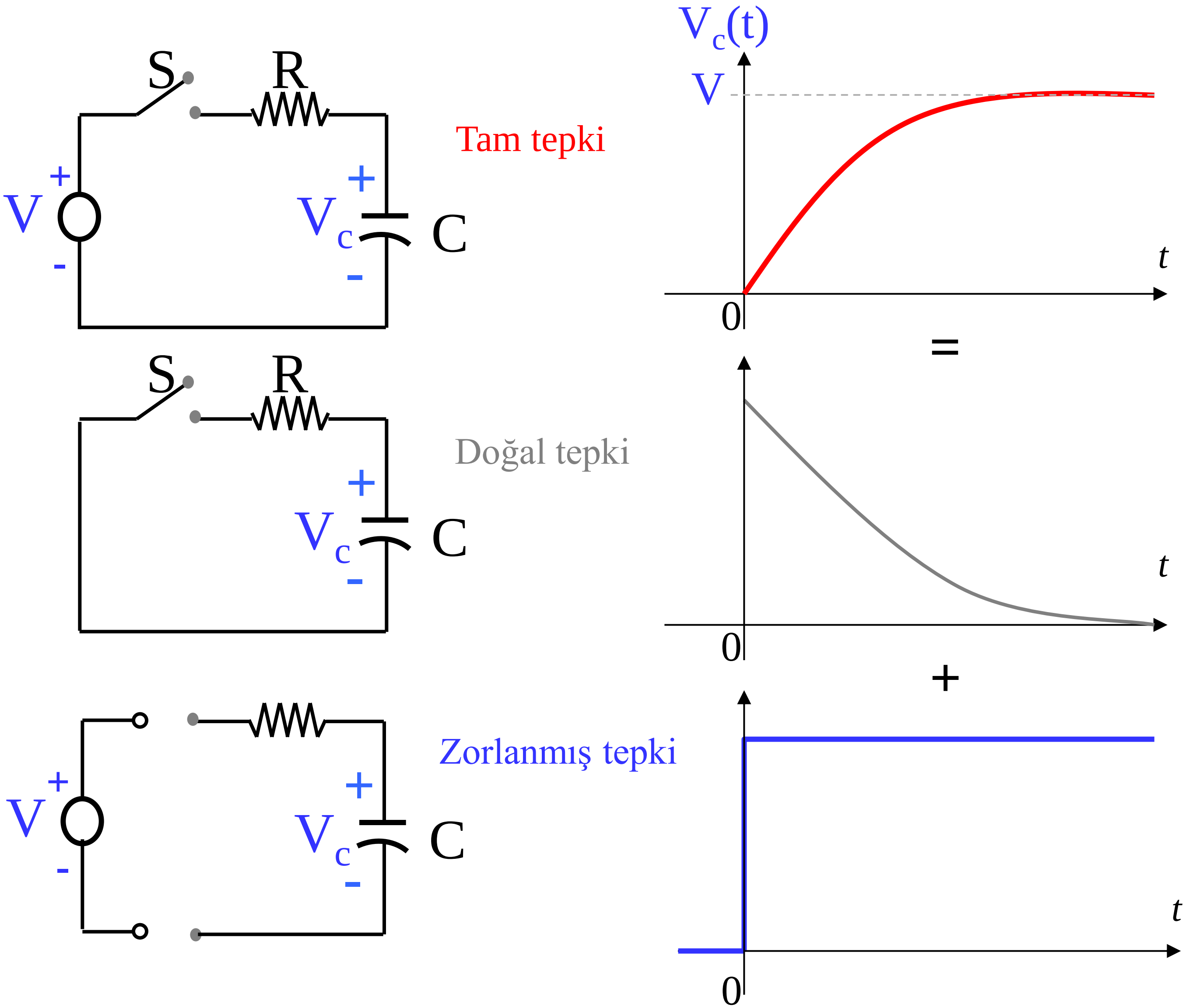




Bu geçiş dönemi devre elemanlarına bağlı olarak uzun veya kısa olabilir. Bu geçiş dönemi devre elemanlarının Doğal tepkisi ve güç kaynağı tarafından oluşturulan Zorlanmış tepkinin toplamı şeklindedir ve bu dersin konusunu oluşturmaktadır.

Devre Tepkilerinin Özelliği

Tam tepki, Doğal ve Zorlanmış tepkinin toplamı şeklindedir



Devrede oluşturulan ani değişimden (anahtarın kapatılması) hemen sonra gözlenen devrenin tepkisi

Devrede güç kaynağı yokken devrenin doğal davranışı

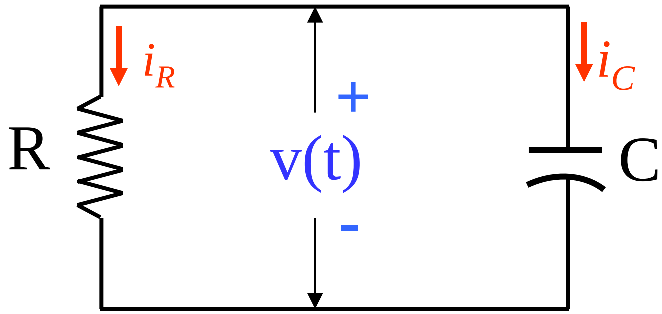
Güç kaynağının devreye uyguladığı gerilim

Doğal Tepki-RC Devresi

Bu kesimde devre tepkisinin, dış bir kaynak olmadığı durumda doğal tepkisi bulunacak. Örnek olarak aşağıdaki devreyi göz önünde bulunduralım.

Direnç üzerindeki akım

$$i(t) = \frac{v_R(t)}{R}$$



Sığa üzerindeki akım

$$i(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$i_R + i_C = 0$$

Kirchhoff AkımYasası (KAY) denklemi:

$$C\frac{d\mathrm{v}(t)}{dt} + \frac{1}{R}\mathrm{v}(t) = 0$$

Birinci dereceden (bir kez türev alınmış) homojen (eşitliğin diğer tarafı sıfır) diferansiyel denklem.

Bu denkleme, türev içerdiği için *diferansiyel denklem* denir.

Çözümün, türevi kendisine eşit olan bir fonksiyon olması gerekir.

$$\mathrm{v}(t) = Ke^{st}$$

s ve K sabitleri bilinirse çözüm sağlanmış olur (K başlangıç koşullarından) bulunur.

Hatırlatma:
Türev Kuralları

$$y(t) = Ae^{bt}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = Abe^{bt} = by(t)$$

$$C\frac{d}{dt}(Ke^{st}) + \frac{1}{R}Ke^{st} = 0 \Rightarrow Ke^{st}(sC + \frac{1}{R}) = 0$$

$$sC + \frac{1}{R} = 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{RC} \Rightarrow \boxed{\mathrm{v}(t) = Ke^{-t/RC}}$$

Doğal Tepki-RC Devresi

$$\mathrm{v}(t) = Ke^{st}$$

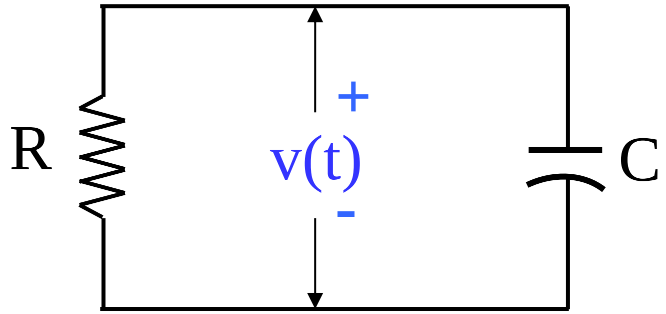
$s = -\dfrac{1}{RC}$ devrenin zaman sabitidir (zaman boyutunda) ve fiziksel olarak ne ifade ettiği ileriki bölümlerde ayrıntılı olarak irdelenecektir.

$$\mathrm{v}(t) = Ke^{-t/RC}$$

K sabitinin değeri, başlangıç durumunda (t=0) v(t)'nin değerini belirleyerek bulunur. Bu durumda v(t=0)=V_o olduğundan (t=0 anında v(t)=V_o), K=V_o bulunur. Eğer başlangıçta sığa boş olsaydı (v(t=0)=0), K=0 olurdu).

Bu durumda aranan çözüm (devrenin doğal tepkisi):

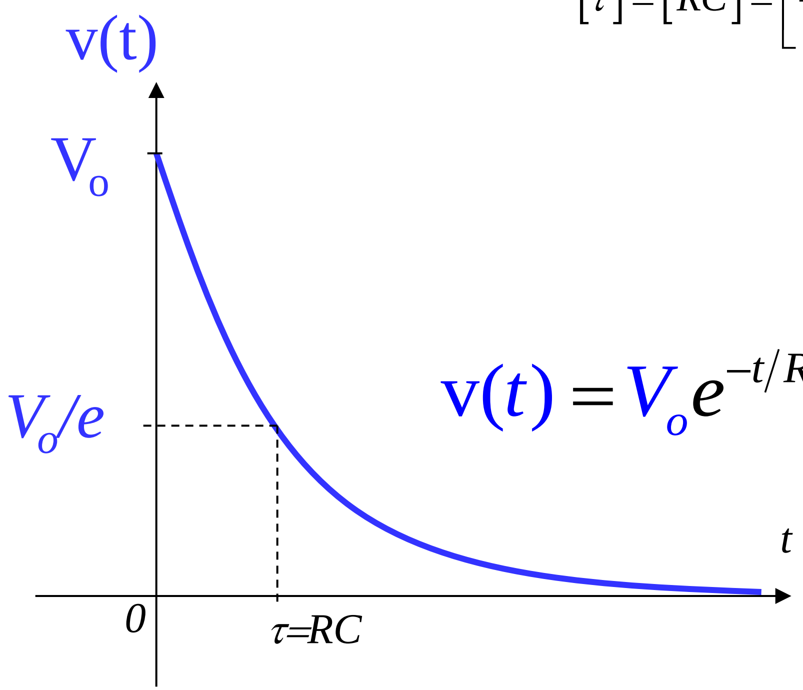
$$\mathrm{v}(t) = V_o e^{-t/RC}$$



$$v(t) = Ke^{-t/RC}$$

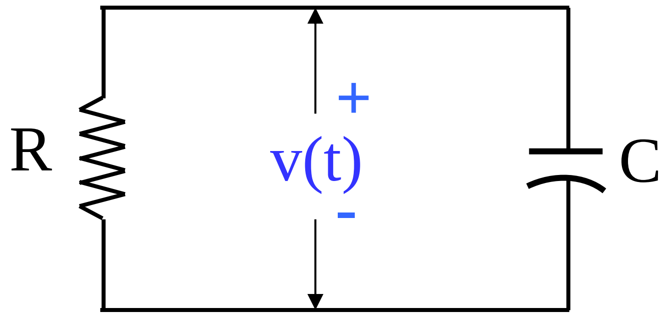
RC Zaman boyutundadır

$$[\tau] = [RC] = \left[\frac{V}{I}\right]\left[\frac{Q}{V}\right] = \left[\frac{V}{Q/T}\right]\left[\frac{Q}{V}\right] = [T]$$



$$v(t) = V_o e^{-t/RC}$$

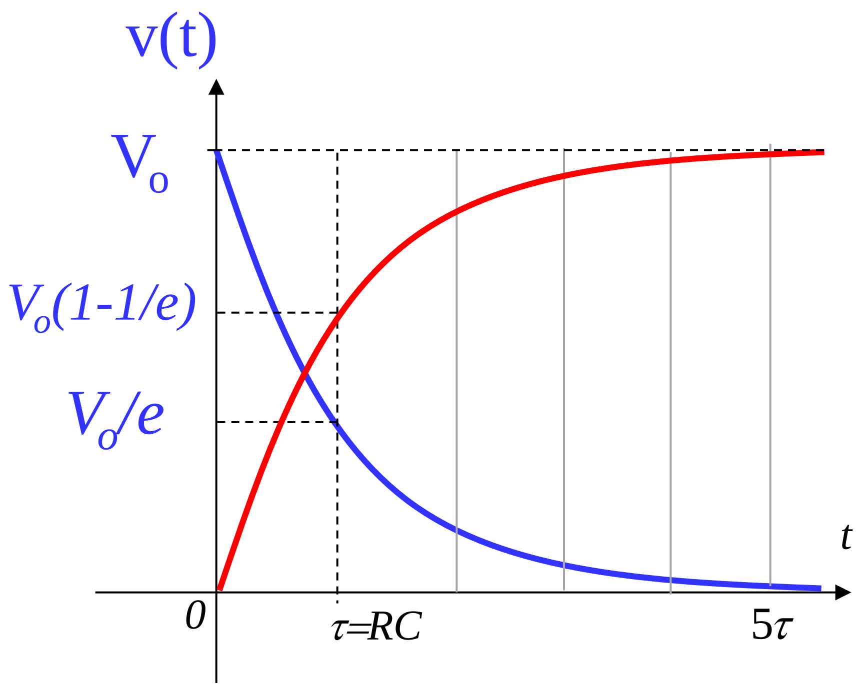
$\tau = RC$;
Başlangıçtaki genliğin (V_o), V_o/e değerine düşmesi için geçen zaman



$$v(t) = Ke^{-t/RC}$$

$$v(t) = V_o e^{-t/\tau}$$

$$\tau \equiv RC$$

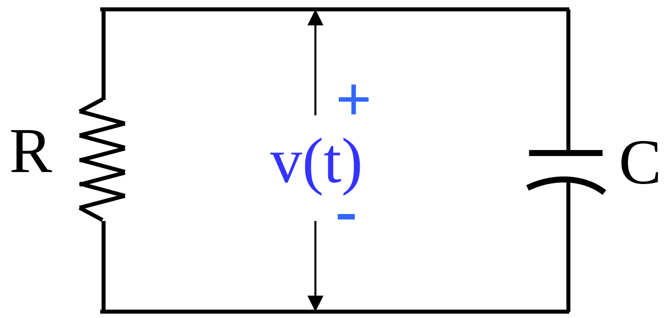


τ= RC;
Başlangıçtaki genliğin (V_o), V_o/e değerine düşmesi için geçen zaman

Sığanın dolması veya boşalması pratik açıdan 5τ sonra tamamlanır

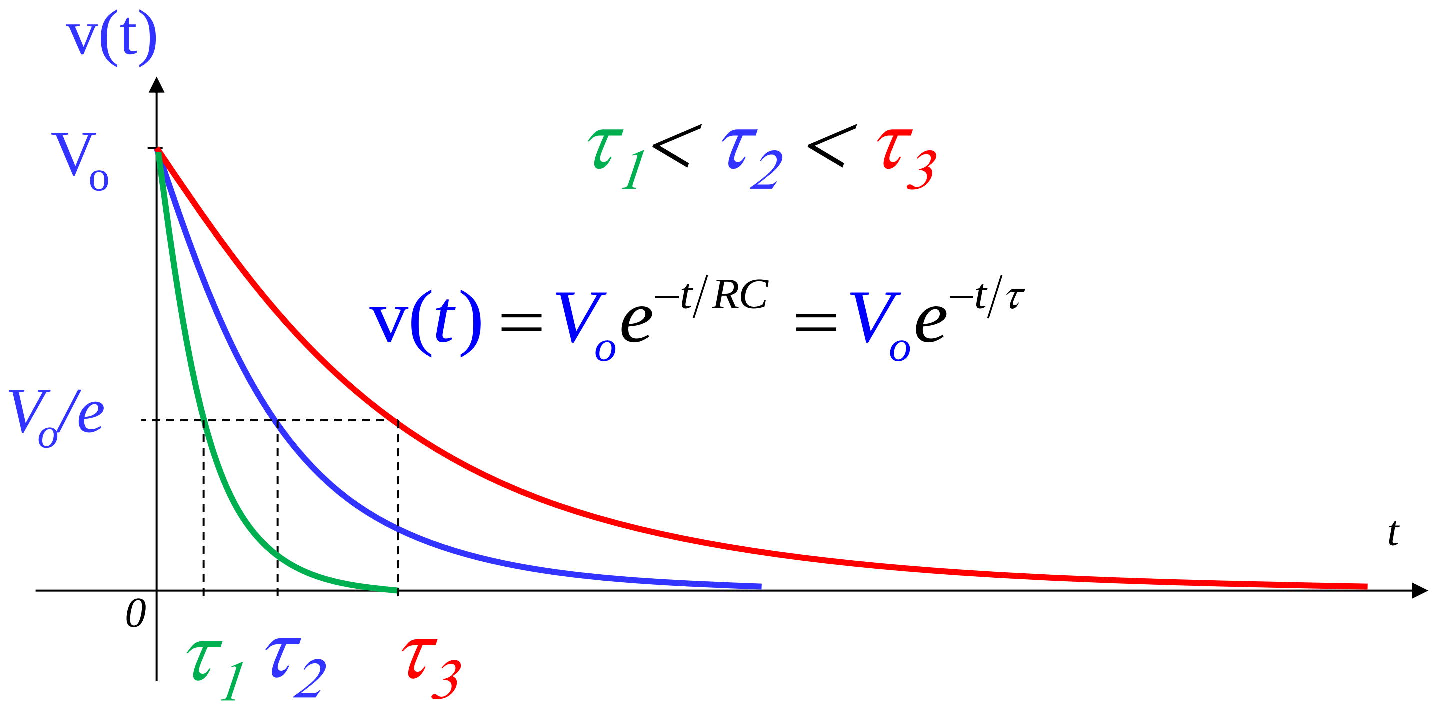
Boşalma: $v(t) = V_o(1-e^{-t/\tau}) \Rightarrow v(t=5\tau) = V_o(1-e^{-5\tau/\tau}) = V_o(1-e^{-5}) = V_o(1-0.007) \cong (0.993)V_o$

Dolma: $v(t) = V_o e^{-t/\tau} \Rightarrow v(t=5\tau) = V_o e^{-5\tau/\tau} = V_o e^{-5} = V_o(0.007) \cong (0.003)V_o$



$$\tau = RC$$

$$v(t) = Ke^{-t/RC}$$

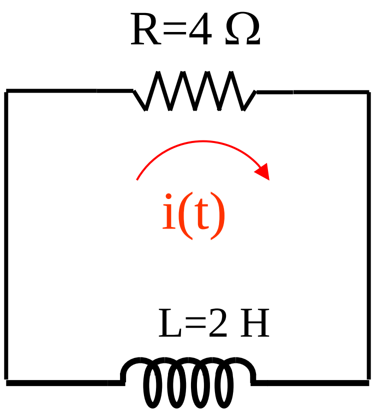


$$\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$$

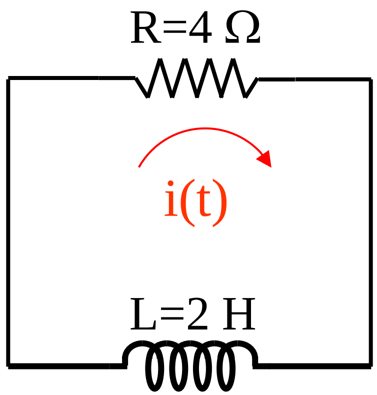
$$v(t) = V_o e^{-t/RC} = V_o e^{-t/\tau}$$

Örnek 3.1: Aşağıdaki RL devresinin:

(a) i(t) doğal tepki bağıntısını bulunuz.
(b) i(0)=5A ise i(t)'nin sayısal değerini bulunuz.



Çözüm: (a) Kirchhoff Gerilim Yasası (KGY) denkleminden



$$V_R + V_L = 0$$

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0$$

Diferansiyel denklemin çözümü: $i(t) = Ke^{st}$

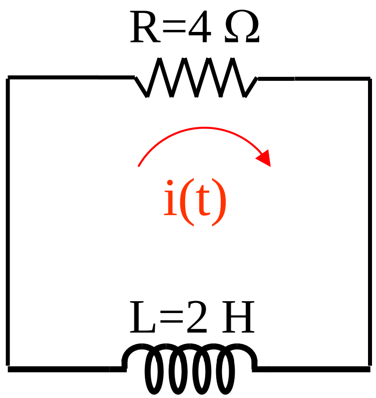
$$L\frac{d}{dt}(Ke^{st}) + R(Ke^{st}) = 0 \Rightarrow Ke^{st}(sL + R) = 0 \Rightarrow sL + R = 0 \Rightarrow s = -\frac{R}{L}$$

Çözüm: $i(t) = Ke^{-Rt/L}$

(b) Problemde verilen değerler kullanıldığında (i(t=0)= 5 A)

$$i(t=0) = 5A = Ke^{-(4/2)0} = K.1 \Rightarrow K = 5\ A$$

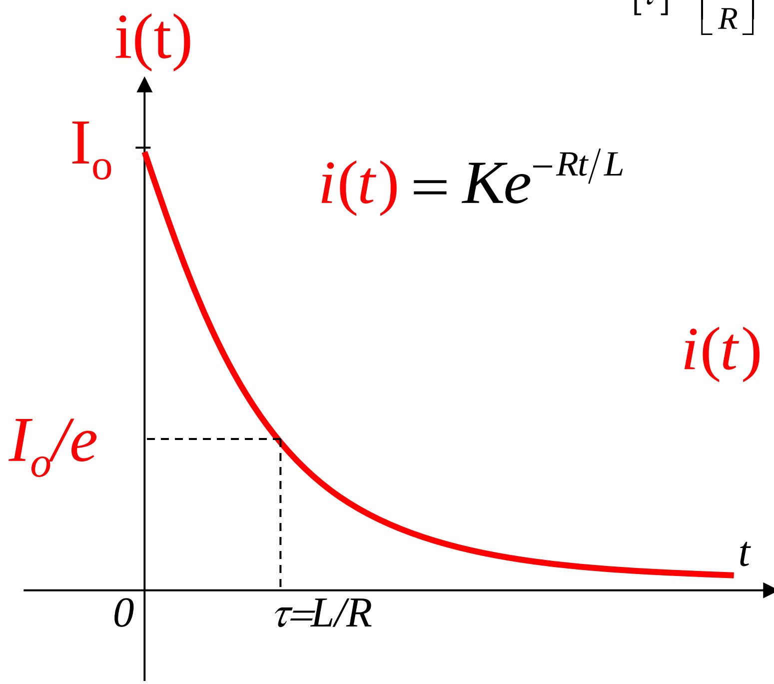
$i(t) = 5e^{-2t}\ amper$ bulunur



$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)=0$$

L/R zaman boyutundadır

$$[\tau]=\left[\frac{L}{R}\right]=\left[\frac{L}{V/I}\right]=\left[\frac{V/(I/T)}{V/I}\right]=\left[\frac{1}{V/I}\right]\left[\frac{V}{I/T}\right]=[T]$$

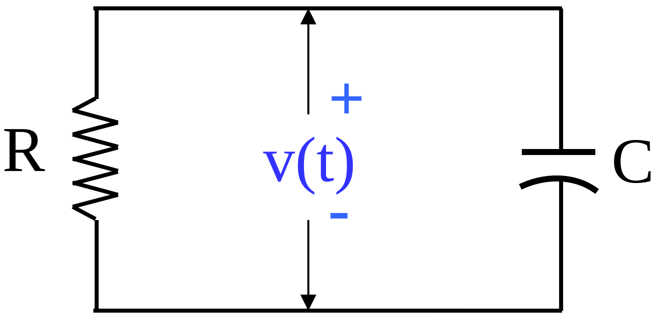


$$i(t)=Ke^{-Rt/L}$$

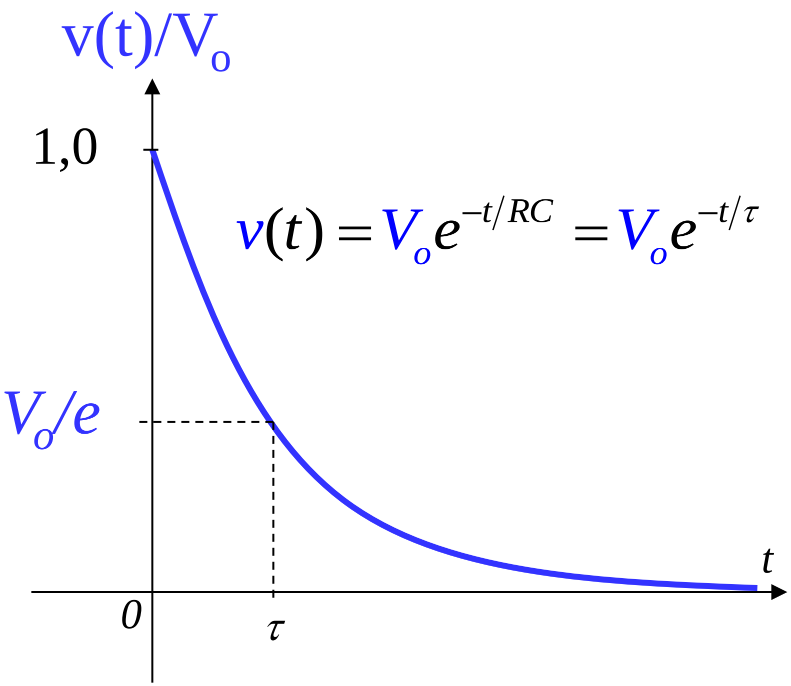
$$i(t)=Ke^{-Rt/L}=Ke^{-t/\tau}$$

τ= L/R; Başlangıçtaki akımın (I_o), I_o/e değerine düşmesi için geçen zaman

RC Devresi



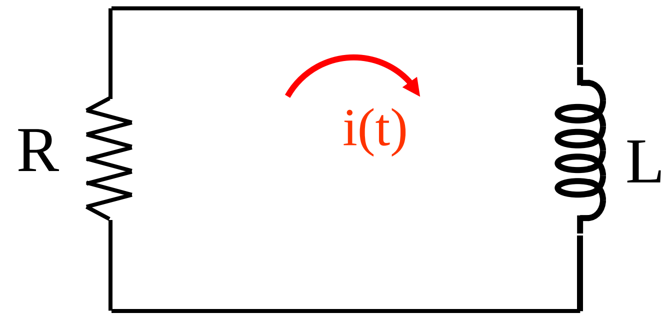
$$C\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{R}v(t)=0$$



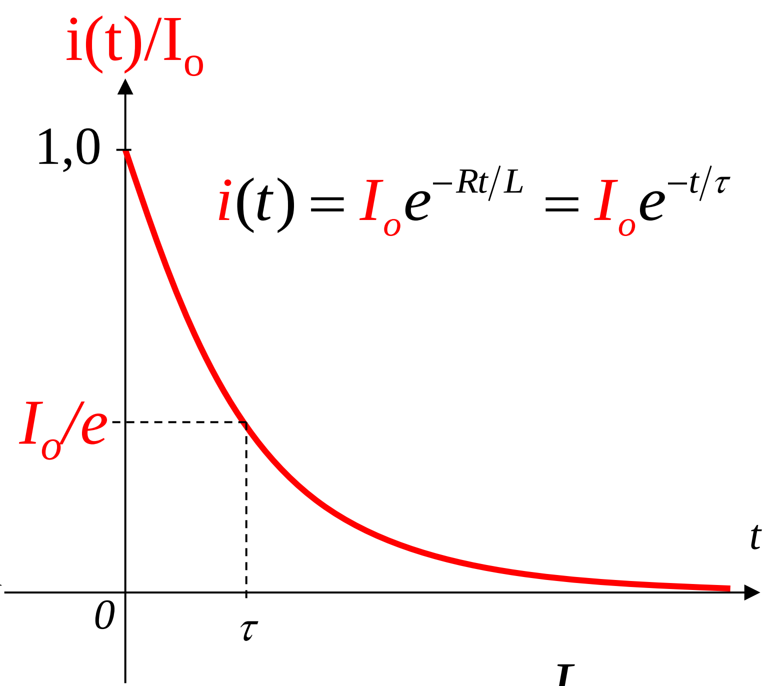
$$v(t)=V_o e^{-t/RC}=V_o e^{-t/\tau}$$

Zaman sabiti $\tau \equiv RC$

RL Devresi



$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)=0$$



$$i(t)=I_o e^{-Rt/L}=I_o e^{-t/\tau}$$

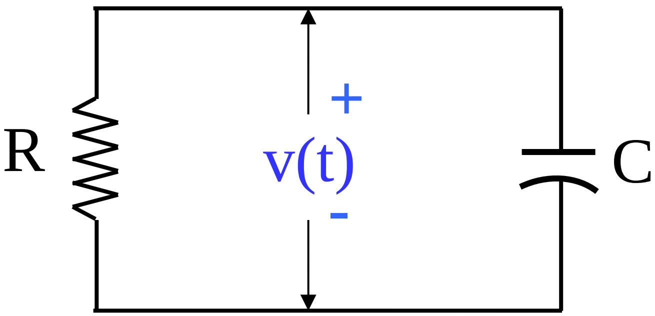
Zaman sabiti $\tau \equiv \frac{L}{R}$

$$\boxed{\begin{array}{c} i(t)=Ke^{-\alpha t} \\ \alpha \equiv \frac{1}{\tau} \end{array}}$$

τ zaman sabiti:

Doğal tepkinin sönmesi için gerekli zaman uzunluğunun bir ölçeği

RC Devresi



KAY $C\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{R}v(t)=0$

$$v(t)=V_o e^{-t/RC}$$

$$i(t)=v(t)/R=\frac{V_o}{R}e^{-t/RC}=I_o e^{-t/RC}$$

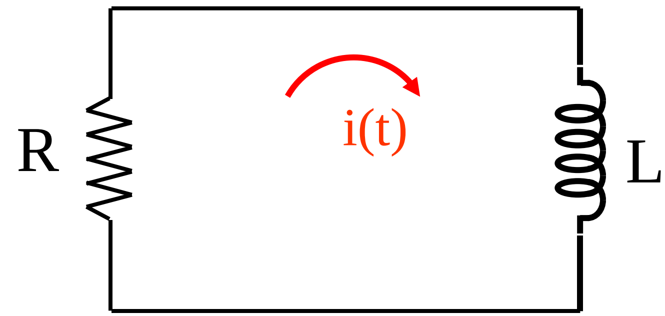
KGY $Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)dt=0$

$$R\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}i(t)=0$$

$$i(t)=I_o e^{-t/RC}$$

$$v(t)=i(t)R=I_o R e^{-t/RC}=V_o e^{-t/RC}$$

RL Devresi



KGY $L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)=0$

$$i(t)=I_o e^{-Rt/L}$$

$$v(t)=Ri(t)=RI_o e^{-Rt/L}=V_o e^{-Rt/L}$$

KAY $\frac{1}{R}v(t)+\frac{1}{L}\int dv(t)dt=0$

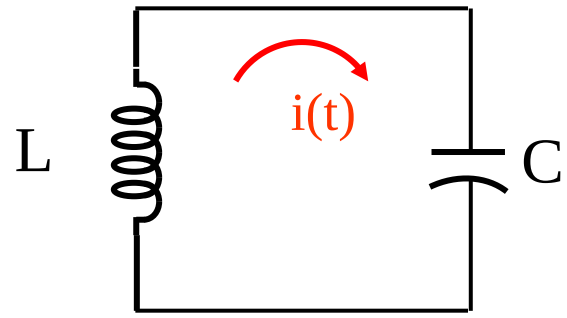
$$\frac{1}{R}\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{L}v(t)=0$$

$$v(t)=V_o e^{-Rt/L}$$

$$i(t)=\frac{v(t)}{R}=\frac{V_o}{R}e^{-Rt/L}=I_o e^{-Rt/L}$$

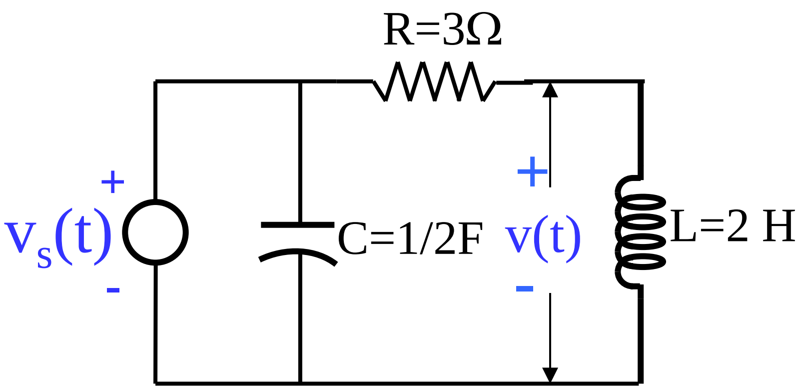
Ödev: Aşağıdaki LC devresinin i(t) tepkisinin doğal bileşenini bulunuz.

LC Devresi

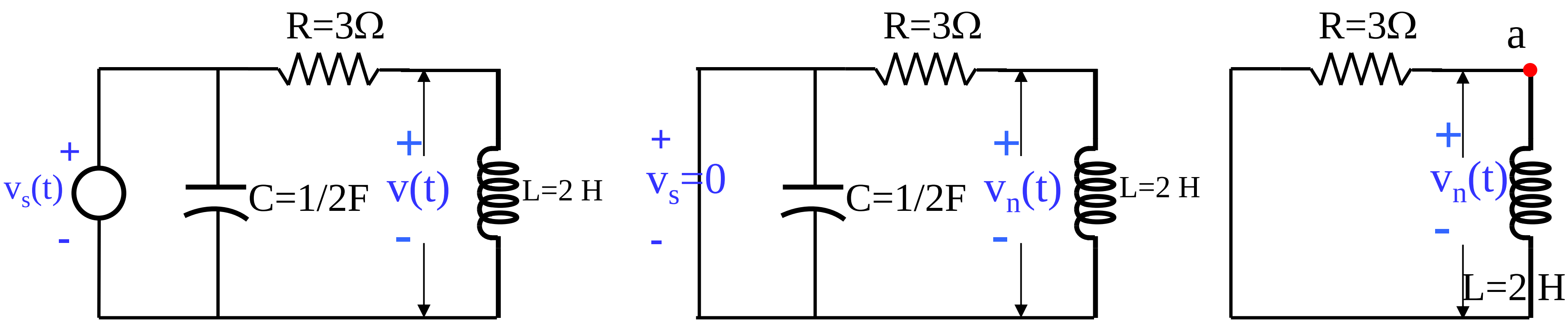


Enerji tüketimi yok (devrede direnç yok!)

Örnek 3.2: Aşağıdaki devrenin $v(t)$ tepkisinin doğal bileşenini bulunuz.



Çözüm 3.2: Doğal bileşen bulunmak istendiğinden ilk adım kaynağın etkisini kaldırmaktır. Gerilim kaynağı kısa devre yapılırsa kaynağın etkisi kaldırılmış olur.



Kısa devreden dolayı sığanın uçları arasındaki gerilim sıfır olmaya zorlanır.

KAY: $\frac{1}{3}v_n(t)+\frac{1}{2}\int v_n(t)dt=0$ $\quad \frac{1}{3}\frac{dv_n(t)}{dt}+\frac{1}{2}v_n(t)=0$ Birinci dereceden diferansiyel denklem

Çözüm: $v_n(t)=V_o e^{st}$

$$\frac{1}{3}\frac{d}{dt}(V_o e^{st})+\frac{1}{2}V_o e^{st}=0 \Rightarrow V_o e^{st}\left(\frac{s}{3}+\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow \frac{s}{3}+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow s=-1,5$$

$$\boxed{v_n(t)=V_o e^{-(1,5)t}}$$

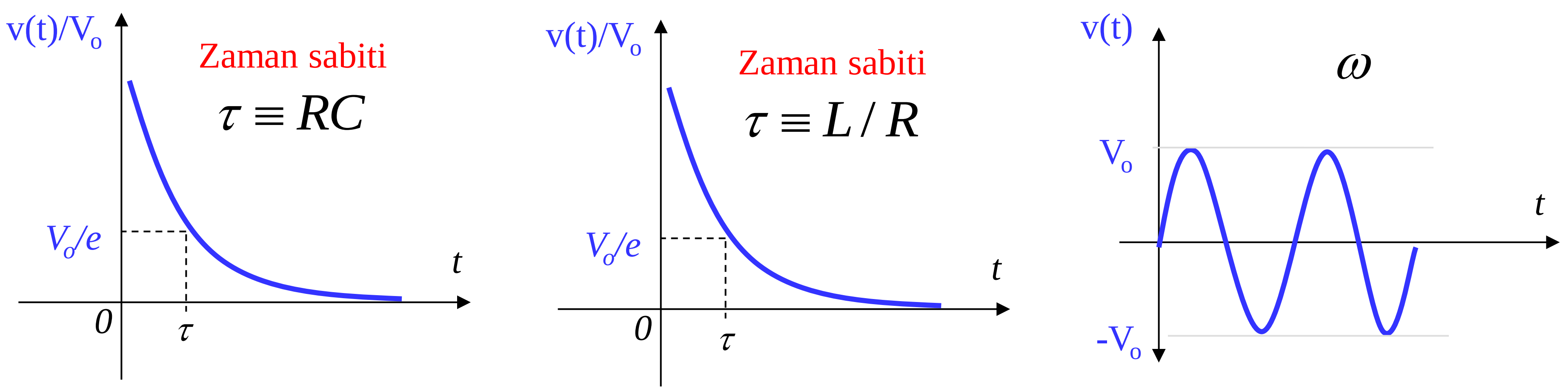
Daha Karmaşık Devrelerin Doğal Tepkisi

Bir önceki bölümde yapılan incelemede devre, enerji depo edici yanlız bir devre elemanı (sığa veya indüktans) içeriyordu.

Enerji kaybı var!

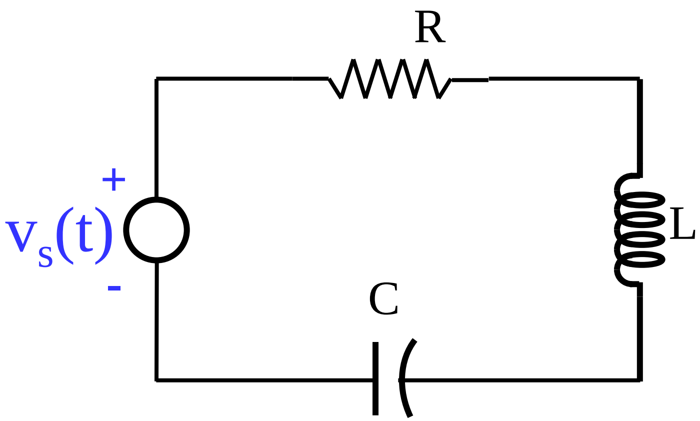
Enerji kaybı var!

Enerji kaybı yok!



Daha Karmaşık Devrelerin Doğal Tepkisi

Bir önceki bölümde yapılan incelemede devre, enerji depo edici yanlız bir devre elemanı (sığa veya indüktans) içeriyordu. Bu kesimde, enerji depo eden birden fazla devre elemanı içeren devrelerin doğal tepkileri inclenecektir.



Kirchhoff Gerilim Yasası (KGY): $$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt = v_s(t)$$

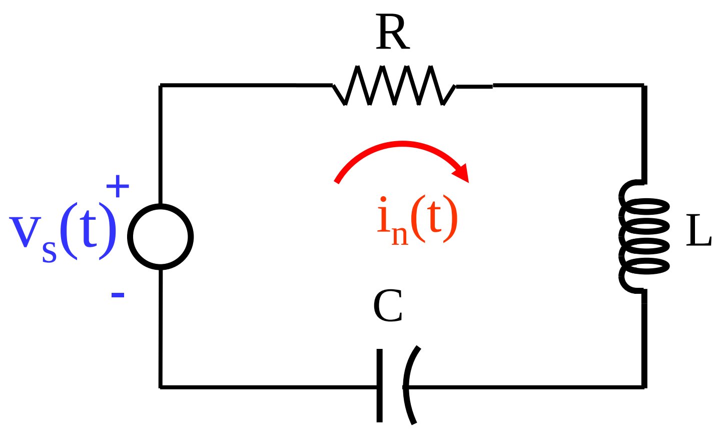
İntegralden kurtarmak için eşitliğin türevi alınırsa

$$L\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = \frac{v_s(t)}{dt}$$

İkinci dereceden (iki kez türev alınmış fonksiyon) <u>homojen olmayan</u> (eşitliğin sağ tarafı <u>sıfırdan farklı</u>) diferansiyel denklem.

Devrenin doğal tepkisi, $i_n(t)$ ($v_s(t)=0$ durumunda)

$$L\frac{d^2 i_n(t)}{dt^2} + R\frac{di_n(t)}{dt} + \frac{1}{C}i_n(t) = 0$$



Devrenin doğal tepkisi $i_n(t)$

$$L\frac{d^2 i_n(t)}{dt^2} + R\frac{d i_n(t)}{dt} + \frac{1}{C} i_n(t) = 0$$

Çözüm önerisi: $i_n(t) = Ke^{st}$ $\Rightarrow$ $s^2 LKe^{st} + sRKe^{st} + \frac{1}{C} Ke^{st} = 0$

$$Ke^{st}(s^2 L + sR + \frac{1}{C}) = 0 \qquad s^2 L + sR + \frac{1}{C} = 0$$

İkinci dereceden olduğu için en genel durumda iki kök bulunur; s_1 ve s_2

$$i_n(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

K_1 ve K_2 katsayıları, başlangıç koşullarından bulunur.

Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri Üzerine:

$$a\frac{d^2y(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+cy(t)=0$$

Çözüm önerisi: $y(t)=Ae^{st}$

$$aAs^2e^{st}+bAse^{st}+ce^{st}=Ae^{st}(as^2+bs+c)=0$$

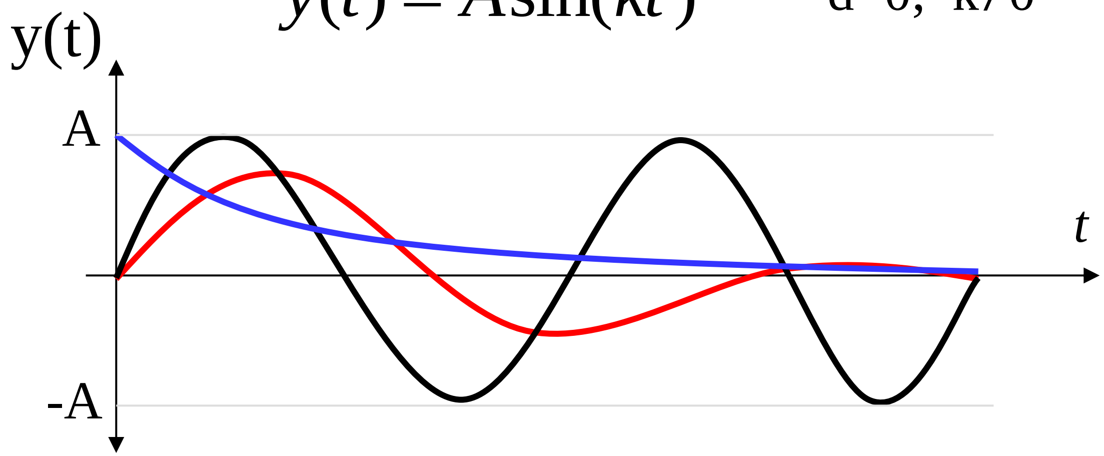
$$as^2+bs+c=0 \quad \Rightarrow \quad s_{1,2}=d\pm jk$$

Kökler, en genel olarak karmaşık sayıdır.

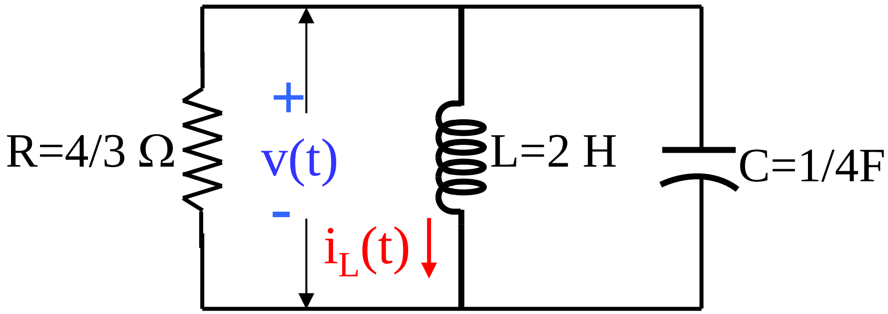
$y(t)=Ae^{-dt}$ d≠0; k=0 (Gerçek)

$y(t)=Ae^{-dt}\sin(kt)$ d≠0; k≠0 (Karmaşık)

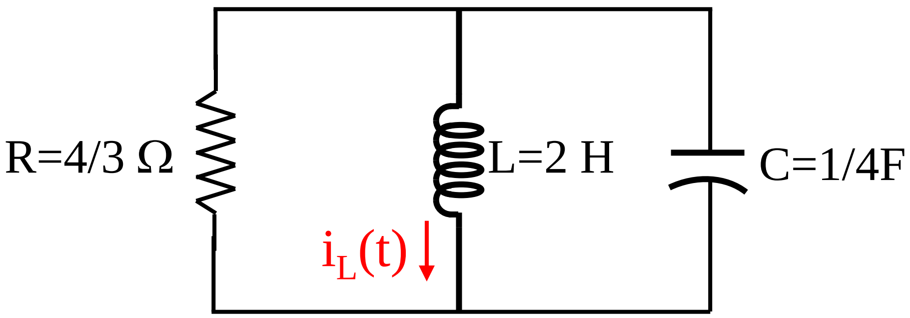
$y(t)=A\sin(kt)$ d=0; k≠0 (Sanal)



Örnek 3.3: Aşağıdaki devre t=0 anında bağlantısı kesilen bir akım kaynağı ile uyarılıyor. Kaynağın bağlantı kesildiği anda sığa gerilimi 4V ve i_L indüktans akımı 1A'dir. t > 0 için v(t) gerilimini bulunuz.



Çözüm: t=0 anında bağlantısı kesildiğinden tepki tam olarak doğal tepkidir. Çözüm için önce devrenin doğal tepkisini bulup daha sonra özel başlangıç koşullarını kullanarak katsayıları bulunacak.



Devrenin doğal tepkisi ($v_s(t)=0$):

Kirchhoff AkımYasası (KAY): $\frac{3}{4}v(t)+\frac{1}{4}\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{2}\int v(t)dt=0$

$i_R+i_C+i_L=0$

$\frac{1}{R}v(t)+C\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{L}\int v(t)dt=0$

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Çözüm: $v(t)=Ke^{st}$ $\Rightarrow$ $\frac{d^2v(t)}{dt^2}+3\frac{dv(t)}{dt}+2v(t)=0$

$$Ke^{st}(s^2+3s+2)=0 \qquad s^2+3s+2=0 \Rightarrow s_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4.1.2}}{2.1}=\frac{-3\pm1}{2}$$

$$s_1=-2;s_2=-1$$

$s_1=-2 \quad s_2=-1$

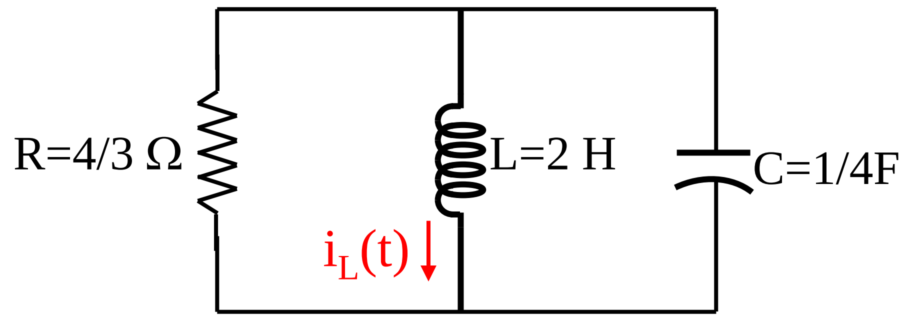
Gerçek kökler

$$\boxed{v(t)=K_1e^{-2t}+K_2e^{-t}}$$

K_1 ve K_2 katsayıları, başlangıç koşullarından (t=0) bulunur.

K_1 ve K_2 katsayılarını bulmak için başlangıç koşullarını (t=0) kullanalım.

$$v(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-t}$$



İki bilinmeyen olduğu için iki denklem elde etmemiz gerekir.

t=0, v(0)=4V

$$v(t=0) = K_1 + K_2$$

t=0, türev

$$\frac{dv(t=0)}{dt} = -2K_1 - K_2$$

t=0'da v(t=0) ve dv(t=0)/dt değerleri bilinirse K_1 ve K_2 katsayıları bulunabilir.

Başlangıç Koşulları:
1-Kaynağın bağlantı kesildiği anda sığa gerilimi (v_c)= 4 V;
2- indüktans akımı (i_L)=1 A

$$\frac{3}{4}v(t)+\frac{1}{4}\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{2}\int v(t)dt=0$$

t=0'da KAY eşitliği

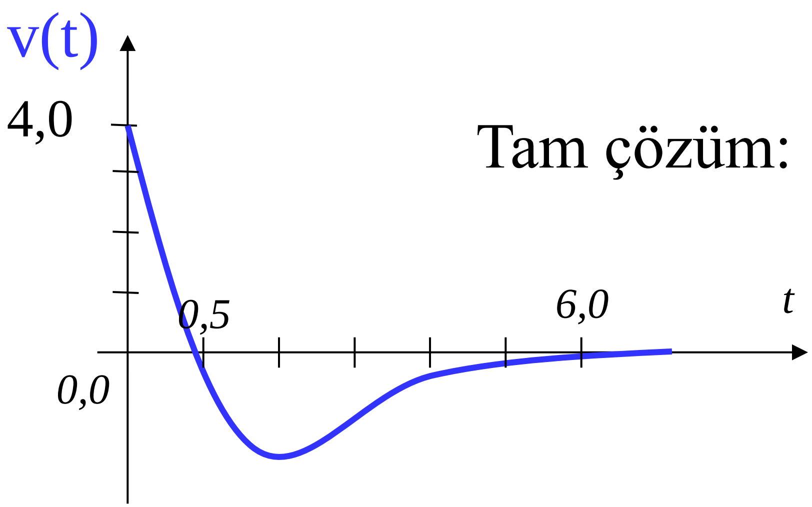
$$i_R(t=0)+i_C(t=0)+i_L(t=0)=0$$

$$\frac{3}{4}v(t=0)+\frac{1}{4}\frac{dv(t=0)}{dt}+i_L(t=0)=0$$

$$i_L(t=0)=1A$$

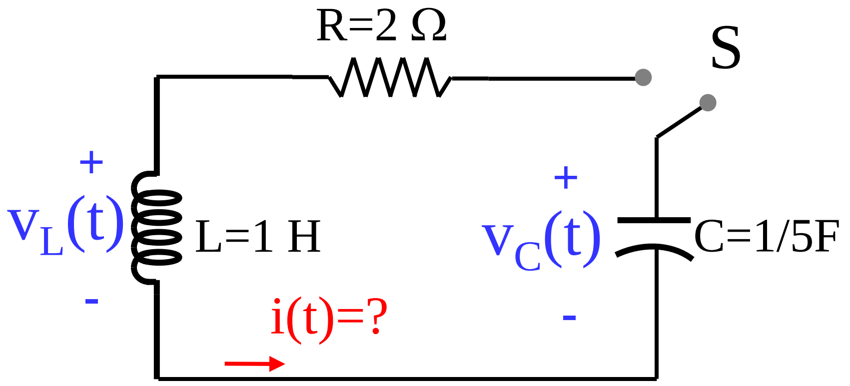
$$\frac{3}{4}4+\frac{1}{4}\frac{dv(t=0)}{dt}+1=0 \Rightarrow \frac{dv(t=0)}{dt}=-16$$

$$\left.\begin{array}{l} v(t=0)=K_1+K_2=4 \\ \dfrac{dv(t=0)}{dt}=-2K_1-K_2=-16 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} K_1+K_2=4 \\ 2K_1+K_2=16 \\ K_1=12; K_2=-8 \end{array}$$

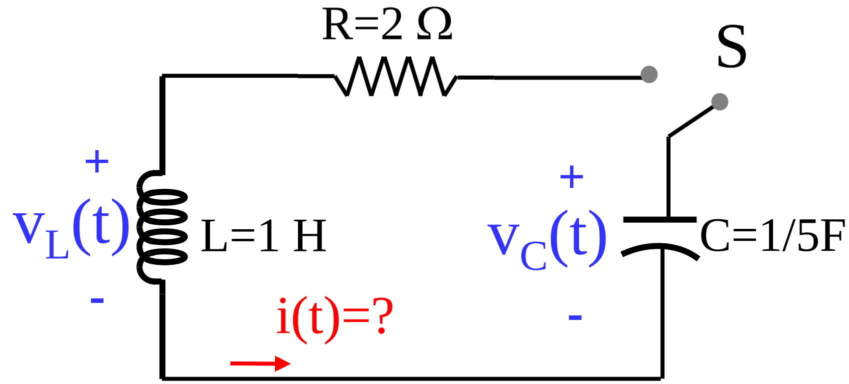


Tam çözüm: $v(t)=12e^{-2t}-8e^{-t}$

Örnek 3.4: Aşağıdaki devrede bulunan 1/5 F'lık sığa t=0 zamanından önce ikinci bir devre ile (şekilde gösterilmeyen) yüklenmiştir. Yüklü olduğundan t < 0 için $\mathbf{v_c}$=10 V'dur. t=0'da S anahtarı kapanıyor. t > 0 değeri için devredeki **i(t)** akımını bulunuz.



Çözüm: t=0 anında bağlantısı kesildiğinden tepki tam olarak, doğal tepkidir. Çözüm için önce devrenin doğal tepkisini bulup daha sonra özel başlangıç koşullarını kullanarak katsayılar bulunacaktır.



Devrenin doğal tepkisi ($v_s(t)$=0).

Devre için KGY:

$$1\frac{di(t)}{dt}+2i(t)+5\int i(t)dt=0$$

İntegralden kurtulmak için bir kez daha türev alınırsa

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2}+2\frac{di(t)}{dt}+5i(t)=0$$

$$s_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$s_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4.1.5}}{2.1}=\frac{-2\pm j4}{2}$$

j: sanal sayı; $j.j$=-1

Çözüm (önerisi): $i(t)=Ke^{st}$

$$Ke^{st}(s^2+2s+2)=0 \quad \Rightarrow \quad s^2+2s+5=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} s_1&=-1+j2 \\ s_2&=-1-j2 \end{aligned}$$

Kökler karmaşık!

$$i(t)=K_1e^{(-1+j2)t}+K_2e^{-(1+j2)t}$$

Başlangıç koşullarına (K_1 veK_2) bağlı çözüm:

$$i(t) = K_1 e^{(-1+j2)t} + K_2 e^{-(1+j2)t}$$

e^{-t} parantezine alınırsa:

$$i(t) = e^{-t}(K_1 e^{+j2t} + K_2 e^{-j2t})$$

Bu ifade düzenlenerek daha basit bir formatta yazılabilir.

Euler eşitliği: $\boxed{e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta}$

$$i(t) = e^{-t}\left[K_1(\cos 2t + j\sin 2t) + K_2(\cos 2t - j\sin 2t)\right]$$

$$i(t) = e^{-t}\left[A\cos 2t + B\sin 2t\right]$$

$$A \equiv K_1 + K_2$$
$$B \equiv j(K_1 - K_2)$$

K_1 ve K_2 katsayılarını bulmak için başlangıç koşullarını (t=0) kullanmak gerekir.

1. başlangıç koşulu i(t=0)=0

$$i(t=0) = 0 = e^{-0}\left[A\cos 2.(0) + B\sin 2(0)\right] = A \Rightarrow A = 0$$

2. başlangıç koşulundan B katsayısı bulunabilir: $\frac{di(t)}{dt} = e^{-t}\left[-2A\sin 2t + 2B\cos 2t\right] - e^{-t}\left[A\cos 2t + B\sin 2t\right]$

$$\frac{di(t=0)}{dt} = 0(A=0) + e^{-0}\left[-2A\sin 2(0) + 2B\cos 2(0)\right] = 2B$$

t=0'da KGY eşitliği

$$1\frac{di(t=0)}{dt}+2i(t=0)-v_C(t=0)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{di(t=0)}{dt}=10$$

$$i(t=0)=0 \qquad v_C(t=0)=10\ V$$

$$\frac{di(t=0)}{dt}=2B \qquad \frac{di(t=0)}{dt}=2B=10 \Rightarrow B=5$$

Tam çözüm: $i(t)=5e^{-t}\sin 2t\ \ amper$