Ankara Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi, Fizik Mühendisliği Bölümü

FZM207

Temel Elektronik-I

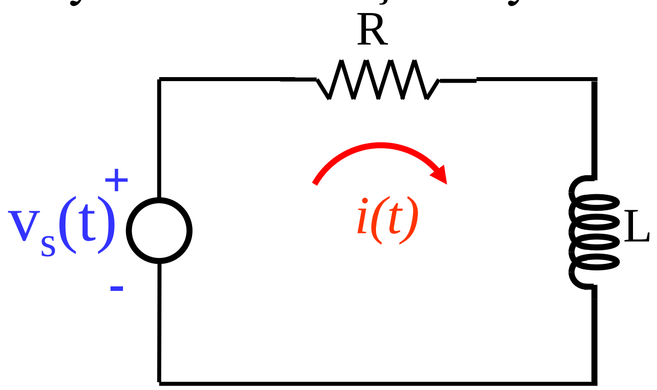
Prof. Dr. Hüseyin Sarı

3. Bölüm:

Temel Devre Tepkileri-2

Zorlanmış Tepki

En genel biçimde bir elektrik devresi, uyarmayı sağlayan bir ya da daha fazla kaynak ile çok sayıda ilmek ve çok sayıda kavşaktan oluşur.



Kirchhoff Gerilim Yasası (KGY)

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)=v_s(t)$$

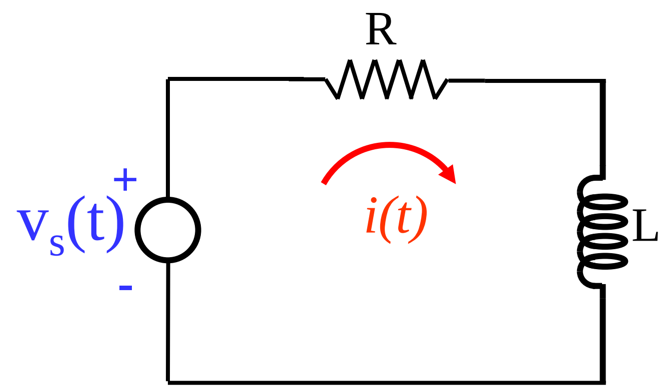
Genel Çözüm: $i(t)=i_f(t)+i_n(t)$

$i_f(t)$= zorlanmış tepki
$i_n(t)$=doğal tepki

$$\left[L\frac{di_n(t)}{dt}+Ri_n(t)\right]+\left[L\frac{di_f(t)}{dt}+Ri_f(t)\right]=v_s(t)$$

Doğal tepki sıfıra gideceğinden $$L\frac{di_n(t)}{dt}+Ri_n(t)\rightarrow 0$$

Zorlanmış tepki: $$L\frac{di_f(t)}{dt}+Ri_f(t)=v_s(t)$$



Kirchhoff Gerilim Yasası (KGY)

$$L\frac{di_f(t)}{dt} + Ri_f(t) = v_s(t)$$

Uyarıcı: v_s(t)=At

Çözümün, uyarıcı (v_s(t)) ile aynı formda olduğunu düşünelim: $i_f(t) = Bt + C$

$$L\frac{d}{dt}(Bt + C) + R(Bt + C) = At$$

Hatırlatma:
Türev Kuralları

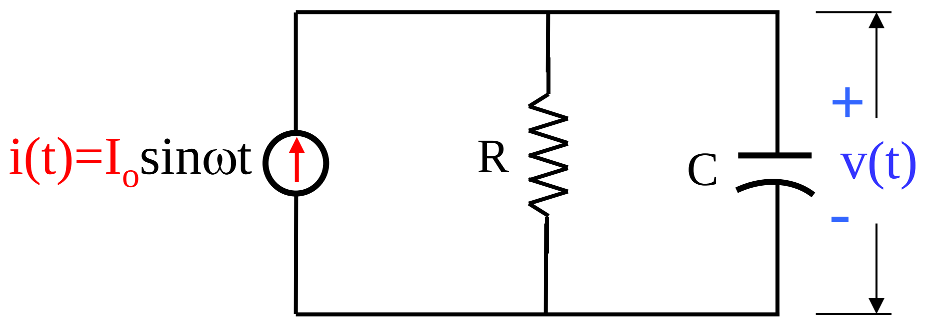
$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= At^n + B \\ \frac{dy(t)}{dt} &= nAt^{n-1} \end{aligned}}$$

$$BL + RBt + RC = At$$

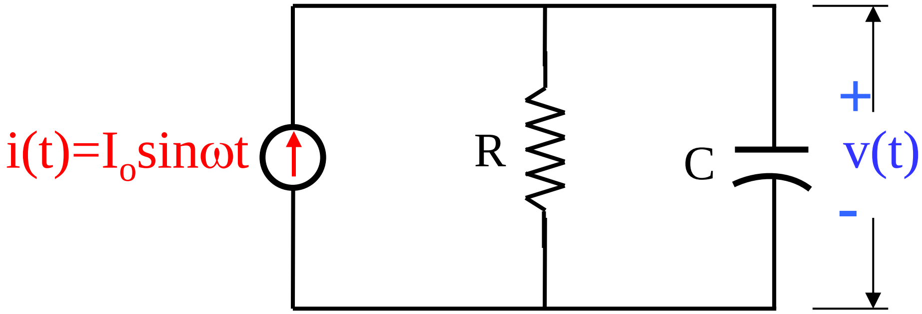
$$(RB)t + (BL + RC) = At \Rightarrow \left.\begin{aligned} RB &= A \\ BL + RC &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} B &= A/R \\ C &= -AL/R^2 \end{aligned}$$

Uyarıcı katsayısına (A) bağlı çözüm: $i_f(t) = \frac{A}{R}t - \frac{AL}{R^2}$

Örnek 3.5: Aşağıdaki devrenin sinüssel akıma tepkisinin **$v_f(t)$** zorlanmış bileşenini bulunuz.



Çözüm:



Devre için Kirchhoff Akım Yasası (KAY):

$$C\frac{dv_f(t)}{dt}+\frac{1}{R}v_f(t)=I_o\sin\omega t$$

Zorlanmış tepkiyi bulmak için $v_f(t)$'yi zorlayıcı fonksiyon ve onun türevi şeklinde yazabiliriz

$$v_f(t)=A\sin\omega t+B\cos\omega t$$

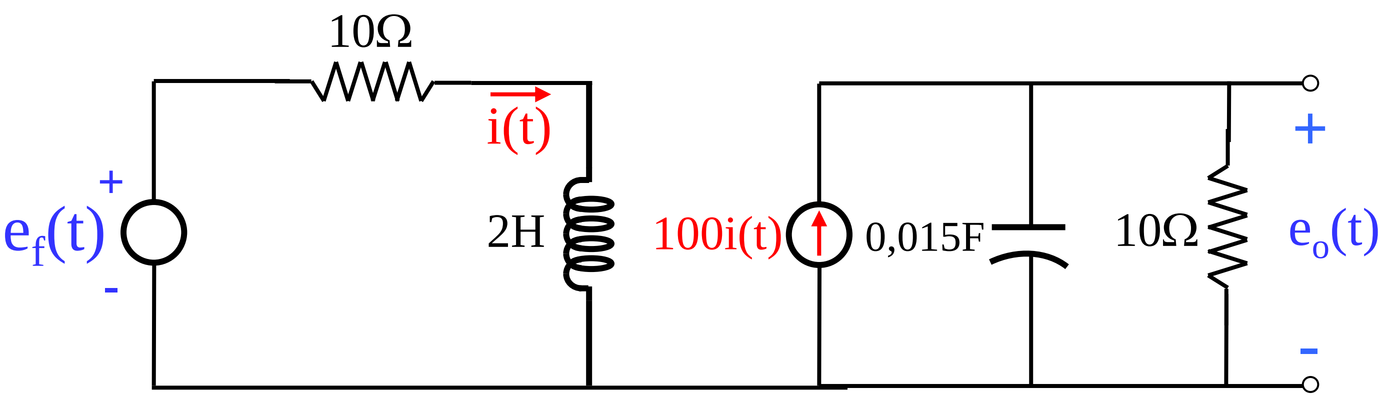
$$C(\omega A\cos\omega t-\omega B\sin\omega t)+\frac{1}{R}(A\sin\omega t+B\cos\omega t)=I\sin\omega t$$

$$\left(C\omega A+\frac{B}{R}\right)\cos\omega t+\left(\frac{A}{R}-C\omega B\right)\sin\omega t=I\sin\omega t \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} C\omega A+B/R&=0\\ A/R-C\omega B&=I\end{aligned}$$

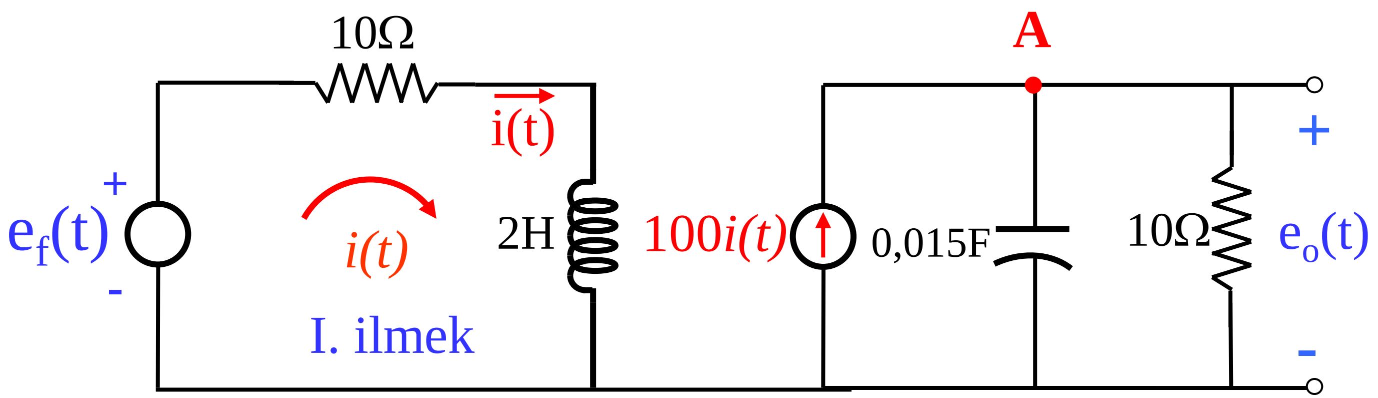
A ve B katsayıları: $A=I\dfrac{G}{G^2+(\omega C)^2}$ $\quad B=I\dfrac{-\omega C}{G^2+(\omega C)^2}$ $\quad G\equiv 1/R$

Çözüm: $v_f(t)=I\left(\dfrac{G}{G^2+(\omega C)^2}\sin\omega t-\dfrac{\omega C}{G^2+(\omega C)^2}\cos\omega t\right)$

Örnek 3.6: Aşağıdaki devreye t=0 anında $e_f(t)=10e^{-4t}$ mV'luk bir gerilim uygulanmıştır. $e_o(t)$ çıkış geriliminin zorlanmış bileşenini bulunuz.



Çözüm: Devre davranışını tanımlayan iki eşitlik, sol ilmekte uygulanan KGY eşitliği ve A düğüm noktasındaki KAY eşitliğidir



I. ilmek için Kirchhoff GerilimYasası (KGY)

$$2\frac{di(t)}{dt}+10i(t)=e_f(t)$$

A noktası için Kirchhoff Akım Yasası (KAY)

$$0,015\frac{de_o(t)}{dt}+0,1e_o(t)=100i(t)$$

$$2\frac{di(t)}{dt}+10i(t)=e_f(t)$$

$$0,015\frac{de_o(t)}{dt}+0,1e_o(t)=100i(t)$$

Uyarı, üstel biçimde olduğundan tepkilerin de aynı mertebede üstel olduğunu varsayalım:

$$i(t)=Ie^{-4t}$$
$$e_o(t)=E_oe^{-4t}$$

$$-8Ie^{-4t}+10Ie^{-4t}=E_oe^{-4t}$$
$$-0,06E_oe^{-4t}+0,1E_oe^{-4t}=100Ie^{-4t}$$

1 mV=$1\text{x}10^{-3}$ V

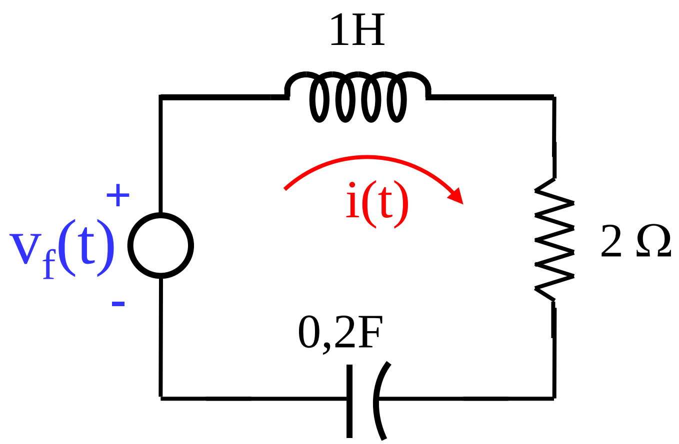
$$-8Ie^{-4t}+10Ie^{-4t}=1\times10^{-2}e^{-4t}$$
$$-(6\times10^{-4})e^{-4t}+(1\times10^{-3})e^{-4t}=100Ie^{-4t}$$

I=$5\text{x}10^{-3}$ A bulunur.

$$E_o=12,5\ V\ ;\quad e_o(t)=12,5e^{-4t}\ V$$

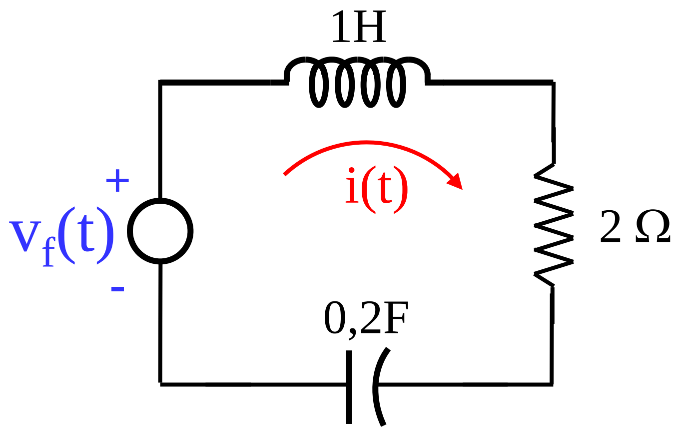
Bu problemdeki 100i(t) bağımlı akım kaynağının varlığı bir gerilim yükselmesi oluşturmuştur. Çıkıştaki gerilim giriş geriliminden daha büyüktür. Bu türden devreler elektronik yükselteçlerde kullanılır.

Örnek 3.7: Aşağıdaki devrede t=0 anında $v_f(t)=5t^2$ V ise $i_f(t)$ zorlanmış bileşenini bulunuz.



Çözüm:

$v_f(t)=5t^2$ V



Devre için Kirchhoff GerilimYasası (KGY)

$$1\frac{di(t)}{dt}+2i(t)+5\int i(t)dt=v(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2i(t)}{dt^2}+2\frac{di(t)}{dt}+5i(t)=\frac{dv(t)}{dt}$$

Zorlanmış tepki yukarıdaki denklemi sağlamalıdır. Bu durumda zorlanmış tepki

$$i_f(t)=At^2+Bt+C$$

Biçiminde t^2 fonksiyonunu ve tüm türevlerini içerecek biçimdedir.

$dv_f(t)/dt=10t$

$$2A+2(2At+B)+5(At^2+Bt+C)=10t$$

$$(5A)t^2+(4A+5B)t+(2A+2B+5C)=10t \Rightarrow \begin{cases} 5A=0 \\ (4A+5B)=10 \\ (2A+2B+5C)=0 \end{cases}$$

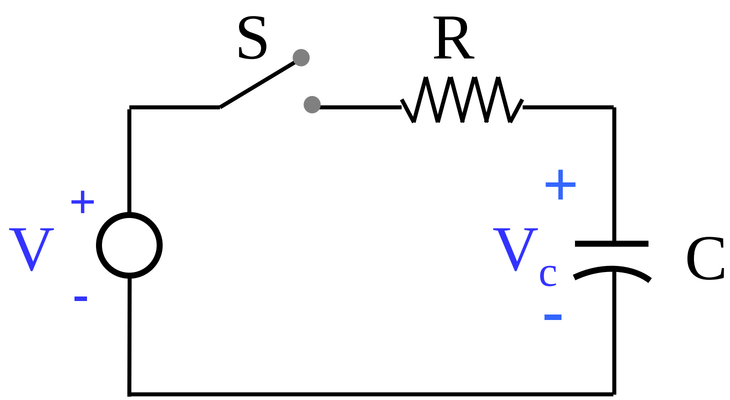
$$A=0;B=2;C=-0,8$$

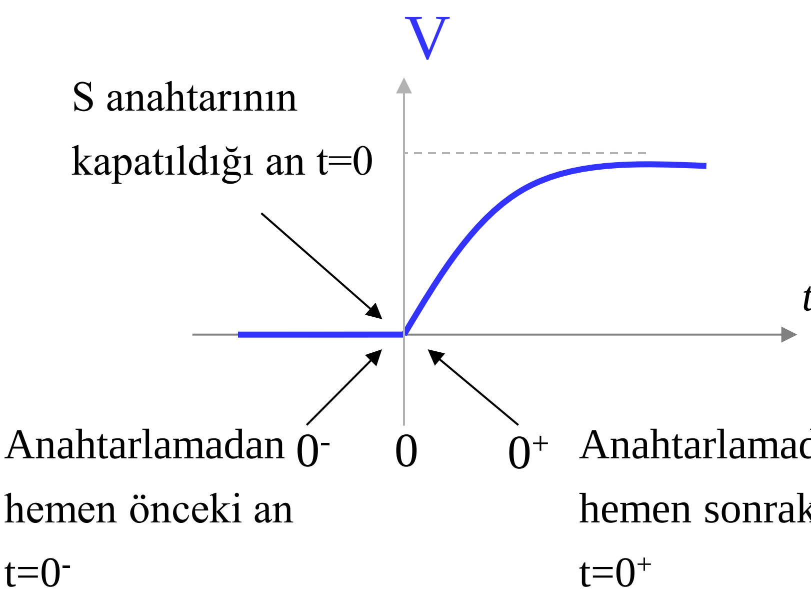
Zorlanmış tepki: $i_f(t)=2t-0,8\ amper$

Başlangıç Koşulları

Bu bölümde başlangıç koşullarının kuramsal olarak nasıl bulunacağı anlatılacaktır. Başlangıç koşullarını bulma Kirchhoff Yasaları ve sığa gerilimi ve indüktans akımının sürekliliği ilkesine dayanır. Sonuçlar Doğal Tepki terimlerinin katsayılarını hesaplamada kullanılır.

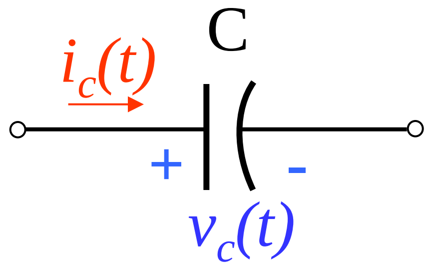
Anahtarlamanın yapıldığı an t=0 olarak kabul edilirse, anahtarlamadan hemen önceki an (0^-); hemen sonraki an ise (0^+) olarak gösterilecektir.





Başlangıç Koşulları

Sığa:



Sığa üzerindeki akım: $$i_c(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

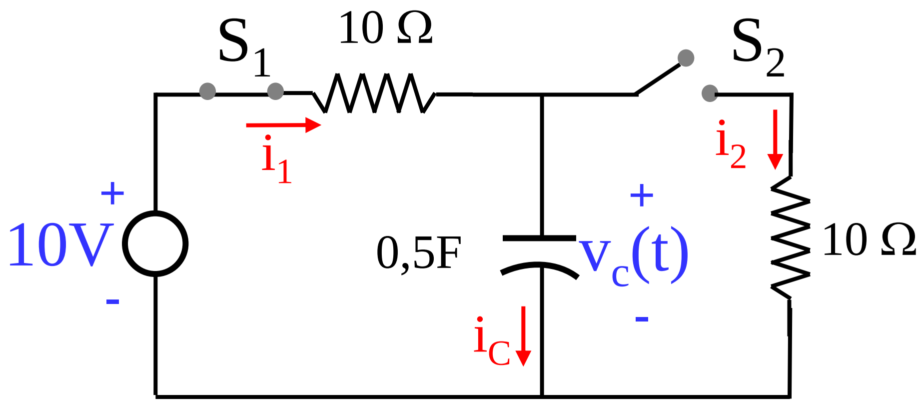
Sığada depo edilen enerji: $$W_C = \frac{1}{2}Cv_C^2$$

Sığa uçları arasında bir anlık değişmeye (yani dv_C/dt=∞) sonsuz bir akımın eşlik etmesi gerektiğini gösterir.

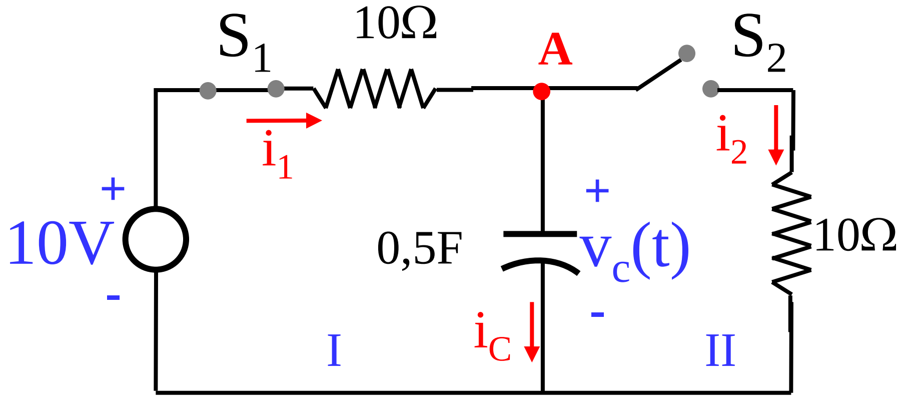
Sonsuz büyüklükte bir akım verilmedikçe bir sığanın uçlarındaki gerilim <u>ansızın</u> değiştirilemez!

$$v_C(0^-) = v_C(0^+)$$

Örnek 3.8: Aşağıdaki devrede S_1 anahtarı t=0 zamanından çok önce kapatılmıştır. S_2 anahtarı da t=0'da kapatılıyor. Anahtar kapatıldıktan hemen sonra $v_C(0^+)$ sığa gerilimini ve $i_C(0^+)$ sığa akımını bulunuz.



Çözüm:



Anahtarlar yukarıdaki konumlarında (S_1=Kapalı; S_2=Açık) olduğunda doğal tepkinin sönmesi için yeterince beklenirse bu durumda sığa 10 V'a kadar yüklenmiş ve devreden geçen akım da sıfır olmuş olur:

$$v_C(0^-) = 10\ V \qquad\qquad i_C(0^-) = 0$$

t=0 anındaki anahtarlama süreci (S_2 anahtarı), ikinci 10 Ω'luk direnci devreye bağlar. Sığa geriliminin sürekliliği ilkesinden

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 10V$$

bulunur. $i_C(0^+)$'yı bulmak için devrede t=0^+ anındaki KGY ve KAY eşitlikleri yazılır. Bunlar:

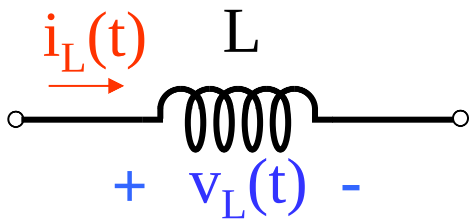
I. ilmek için KGY $\quad 10 - 10i_1(0^+) - v_C(0^+) = 0$

II. ilmek için KGY $\quad v_C(0^+) - 10i_2(0^+) = 0$

$\Rightarrow \quad i_1(0^+) = 0, \quad i_2(0^+) = 1\ A$

A noktası için KAY $\quad i_1(0^+) = i_2(0^+) + i_C(0^+)$ olduğundan $i_C(0^+) = -1\ A$ bulunur.

İndüktans:



İndüktans üzerindeki gerilim: $v_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt}$

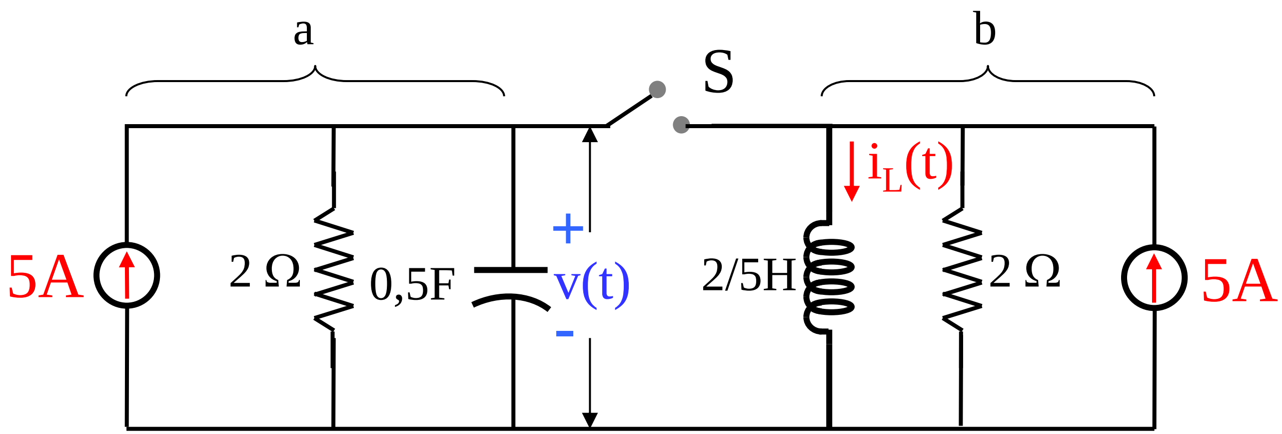
Depolanan enerji: $W_L = \dfrac{1}{2} L i^2$

İndüktans akımındaki anlık değişmeye (yani $di_L/dt=\infty$) sonsuz bir gerilimin eşlik etmesi gerektiğini gösterir.

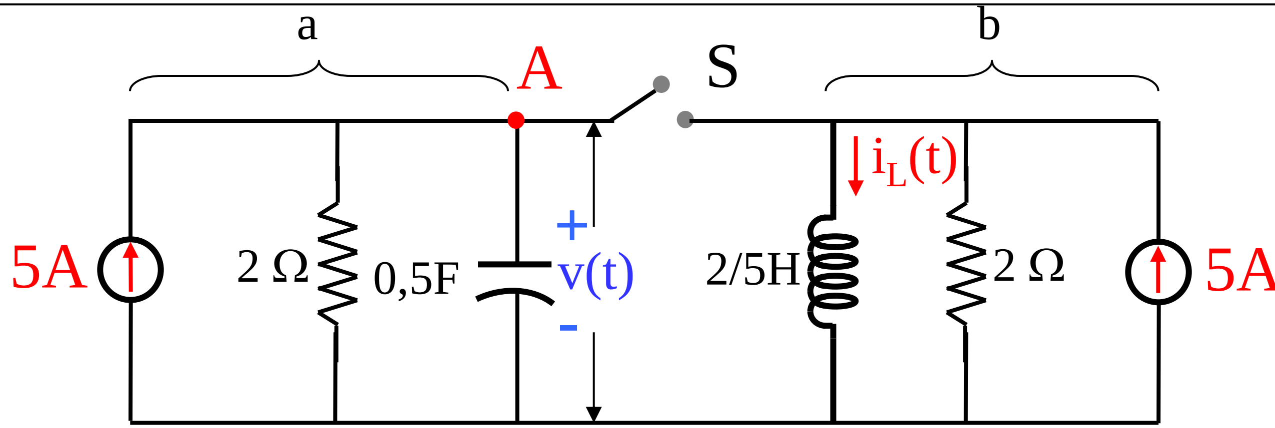
Sonsuz büyüklükte bir gerilim uygulanmadıkça bir indüktansdaki akım <u>birdenbire</u> değiştirilemez.

$$i_L(0^-) = i_L(0^+)$$

Örnek 3.9: Aşağıdaki devrede S anahtarı t=0 zamanından önce uzun zaman açık tutulmuştur ve t=0 anında kapatılmıştır. Anahtar kapandıktan hemen sonra $t=0^+$ anında v, dv/dt, i_L ve di_L/dt yi bulunuz.



Çözüm: İstenen terimler t=0 anındaki v(t) sığa geriliminin ve $i_L(t)$ indüktans akımının belirlenmesi; anahtar kapalı iken bu fonksiyonlara süreklilik ilkesinin ve devreye Kirchhoff Yasalarının uygulanması ile bulunur.



Anahtar kapanmadan önce devrenin a ve b kısımları birbirinden bağımsızdır. Her iki devre de doğru akımla uzun zaman beslendiklerinden zorlanmış tepkileri sabittir:

$$v(0^-) = 10\ V \qquad i_L(0^-) = 5A$$

sürekliliği ilkesinden:

$$v(0^+) = 10\ V \qquad i_L(0^+) = 5A$$

DC durumda bobin kısa devre gibi davranır (2Ω'luk direnç üzerinden akım geçmez!)

Eğer v(0^+)=10 V ve indüktans gerilimi de 10 V ise $\Rightarrow$ $10V = \dfrac{2}{5}\dfrac{di_L(0^+)}{dt}$

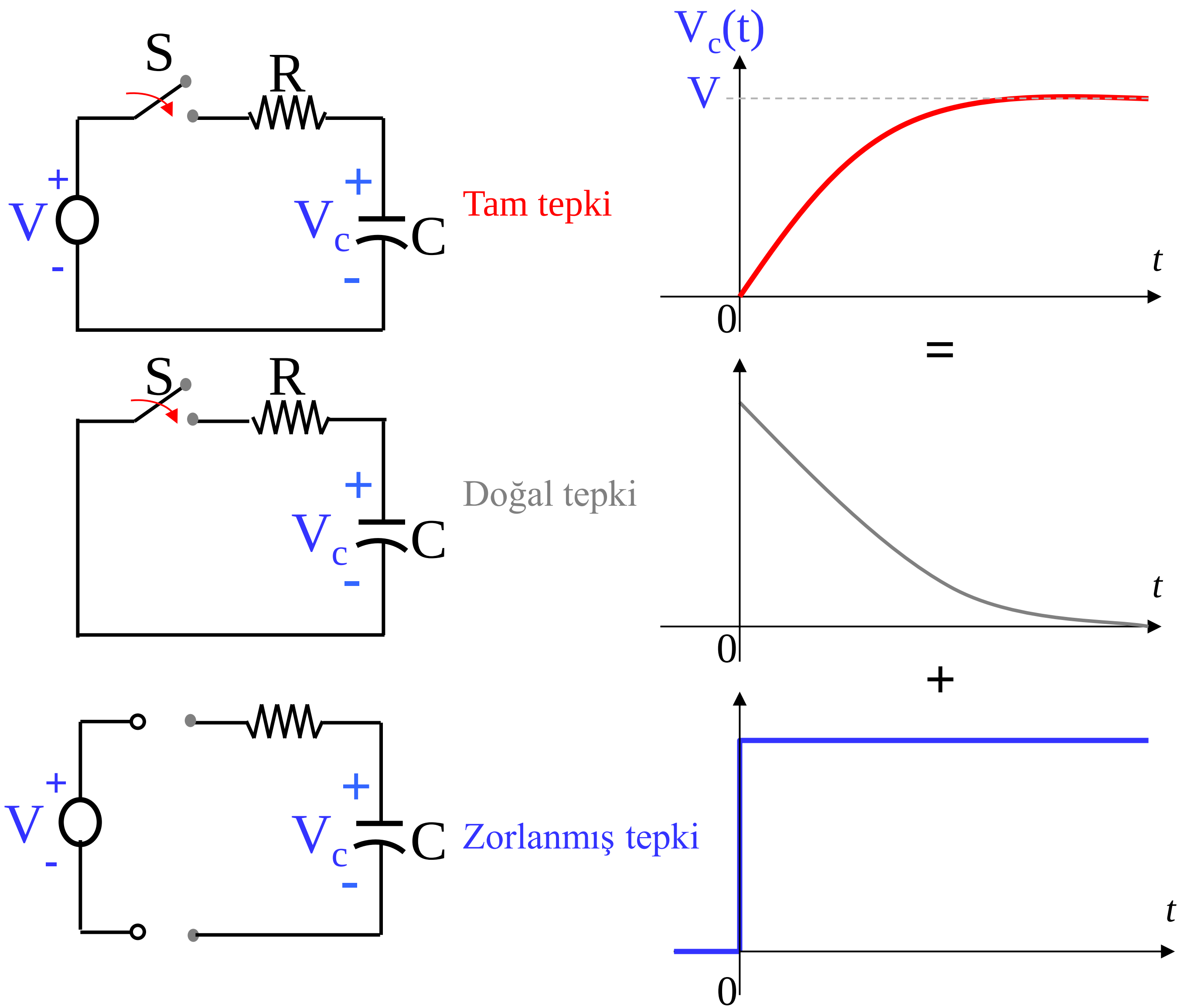
veya $$\frac{di_L(0^+)}{dt} = 25A/s$$

dv/dt'nin değeri t=0 anında Kirchhoff Akım Yasasının (KAY) uygulanması (A noktası) ile bulunur.

$$+5A - \frac{1}{2}v(0^+) - \frac{1}{2}\frac{dv_C(0^+)}{dt} - i_L(0^+) - \frac{1}{2}v(0^+) + 5A = 0 \Rightarrow \frac{dv(0^+)}{dt} = -10V/s \text{ bulunur.}$$

Tam Tepki

Bu bölümde, daha önce ayrı ayrı incelenen Doğal ve Zorlanmış tepkilerin bir arada olduğu durum ile ilgilenilecektir.



Devrede oluşturulan ani değişimden (anahtarın kapatılması) hemen sonra gözlenen devrenin tepkisi

Devrede güç kaynağı yokken devrenin doğal davranışı

Güç kaynağının devreye uyguladığı gerilim

Tam Tepki

Bir devrenin tam tepkisini sistematik olarak incelemek için aşağıdaki adımlar sırası ile izlenecektir.

1- Devre için direfansiyel denklem yazılır. Eğer devrede integralli terimler bulunuyorsa denklemin türevi alınarak basitleştirilir. Denklem, bağımsız kaynakları içeren terimleri eşitliğin bir tarafında, devre parametrelerini ve bağımlı kaynakları içeren terimleri eşitliğin diğer tarafında toplanır.

2- Zorlayıcı etkiler yazılır ve bunlardan belirtgen denklem ve kökleri (s_1, s_2, s_3) hesaplanır. Tepkinin **Doğal Bileşeni**nin biçimi

$$K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + K_3 e^{s_3 t} + \dots$$

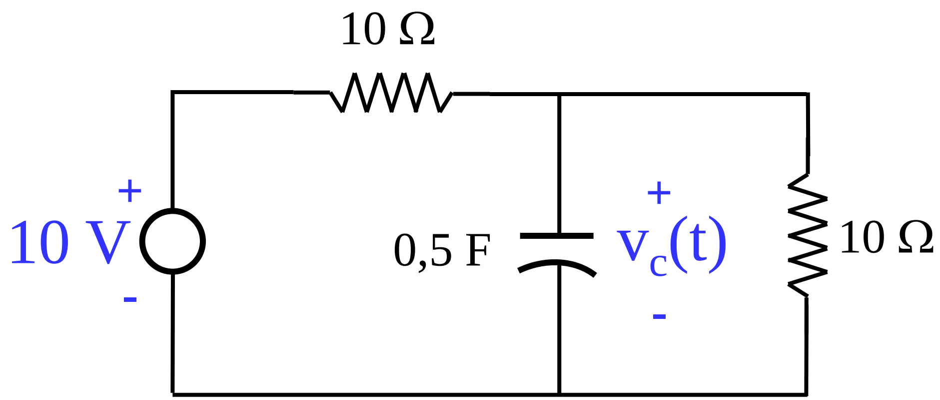
3- **Zorlanmış Tepki** bulunur.

4- **Zorlanmış** ve **Doğal Bileşenler** toplanır. Bunların toplamı **Tam Tepki**dir. Ama Doğal tepkinin K_1, K_2, K_3 vb katsayıları şimdilik bilinmemektedir.

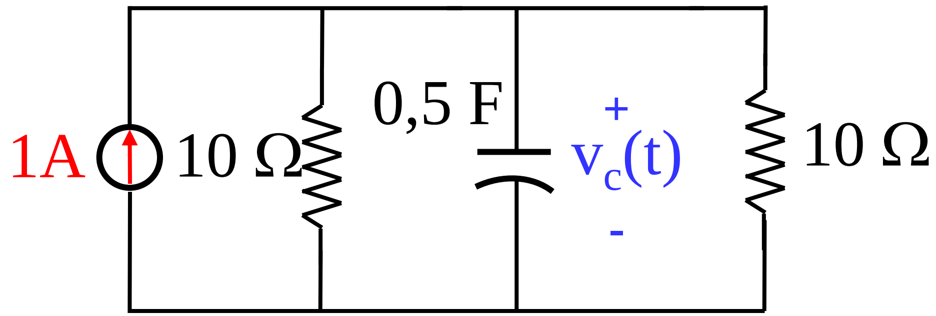
5- Başlangıç koşulları belirlenir. Genel olarak gerekli başlangıç koşullarının sayısı belirtgen denklemin köklerinin sayısı ile belirlenir. Belirtgen denklemin bir kökü varsa fonksiyonun t=0 anındaki değeri, iki kökü varsa fonksiyonun kendisinin ve birinci türevinin t=0 anındaki değeri bulunmalıdır.

6- Başlangıç koşulları kullanılarak K katsayılarının değeri bulunur. Bu adımda tam tepki biçimi kullanılmalıdır.

Örnek 3.10: Örnek 3.8 devresinde t > 0 için $v_c(t)$ değerini bulunuz.



Çözüm: 10 Ω ve 10 V güç kaynağı eşdeğer bir akım kaynağına dönüştürülebilir.



1- Devre için KAY eşitliği:

$$\frac{1}{10}v_C(t)+\frac{1}{2}\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{1}{10}v_C(t)=1A \;\Rightarrow\; \frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{2}{5}v_C(t)=2$$

2- Zorlayıcı<u>sız</u> eşitlik (Doğal Tepki, Akım kaynağı açık devre=0):

$$\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{2}{5}v_C(t)=0$$

Çözüm önerisi:

$$v(t)=Ke^{st} \Rightarrow s+\frac{2}{5}=0 \Rightarrow s=-\frac{2}{5} \Rightarrow v_{cn}(t)=Ke^{-2t/5}$$

3- Uyarma, bir sabit (2) olduğundan zorlanmış bileşen:

$v_{cf}(t)=A$ biçimindedir.

Bu değer başlangıçtaki diferansiyel denklemde yerine konursa

$0+\frac{2}{5}A=2 \Rightarrow A=5$ bulunur.

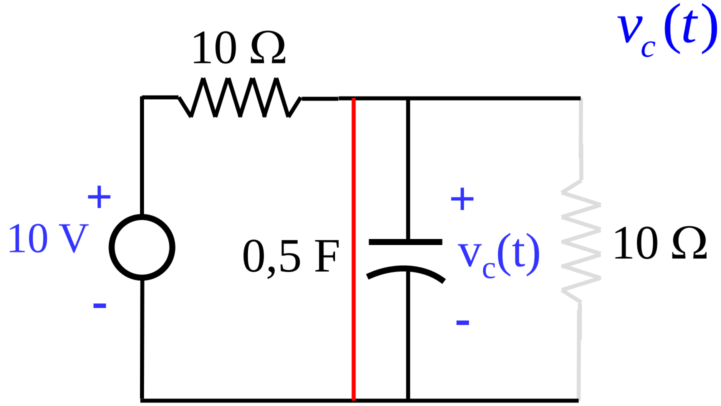
4- Tam tepki: $v_c(t) = v_{cn}(t) + v_{cf}(t) = 5 + Ke^{-2t/5}$

5- Örnek 3.8'in sonuçlarından (başlangıç koşulundan) $v_c(0^+) = 10\ V$

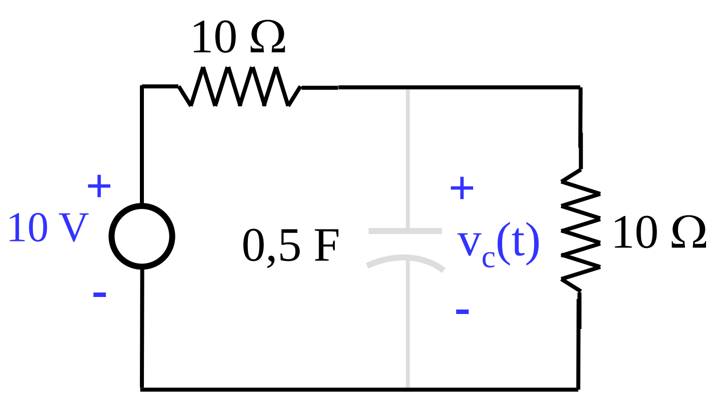
$$10 = 5 + K \Rightarrow K = 5\ V$$

6- Başlangıç koşullarının tam tepkide uygulanması ile

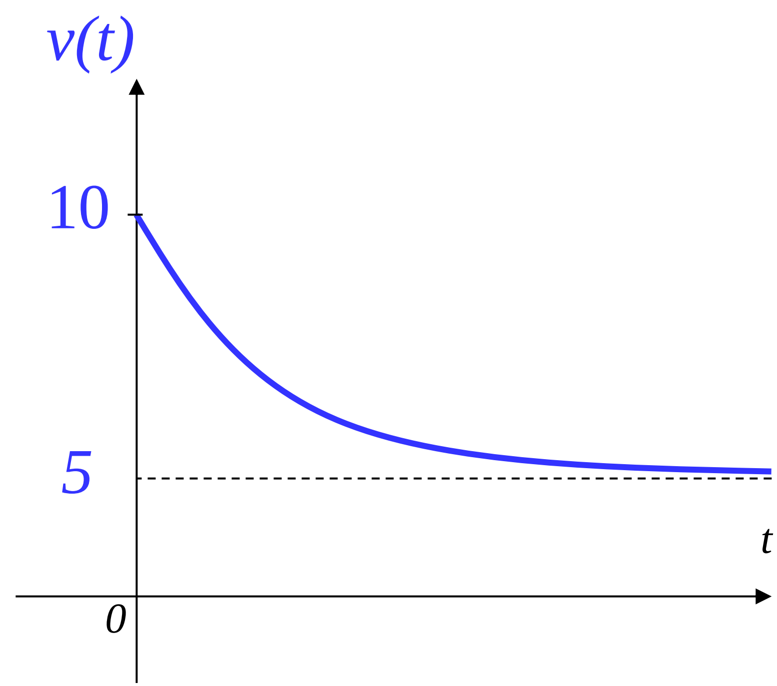
$$v_c(t) = 5 + 5e^{-(2/5)t} \quad volt$$ bulunur.



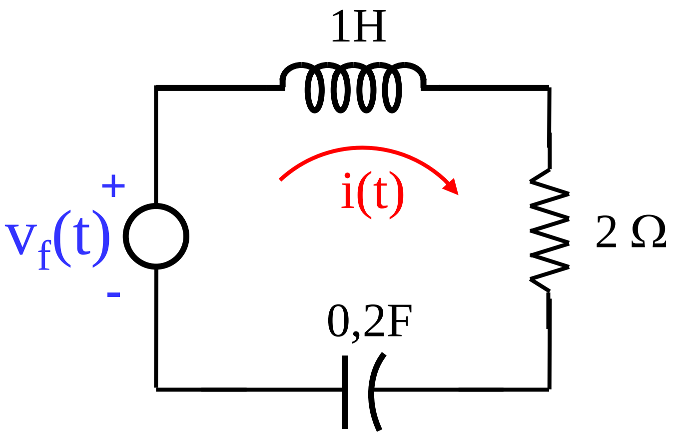
t=0; i=1 A; v(t)=10 V



t=∞; i=0,5 A; v(t)=5 V

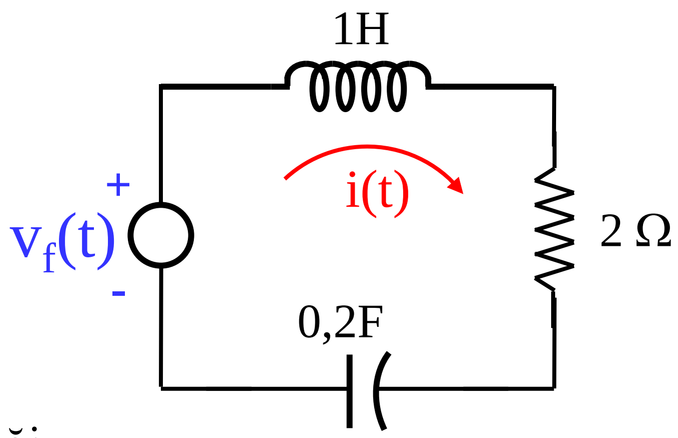


Örnek 3.11: Örnek 3.7 devresinde eğer $t < 0$ için $v(t)=0$ ve $t > 0$ için $v(t)=10e^{-4t}$ volt ise $t > 0$ için $i(t)$'nin tam tepkisini bulunuz.



Çözüm:

$$v_f(t) = 10e^{-4t}$$



1- Devre için KGY eşitliği

$$1\frac{di(t)}{dt} + 2i(t) + 5\int i(t)dt = v_f(t) = 10e^{-4t}$$

Türev alınırsa (integralden kurtulmak için)

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 2\frac{di(t)}{dt} + 5i(t) = \frac{dv_f(t)}{dt} = -40e^{-4t}$$

2- Zorlayıcı<u>sız</u> eşitlik (v_f=0; Doğal tepki) $$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 2\frac{di(t)}{dt} + 5i(t) = 0$$

Çözüm önerisi: $i(t) = Ke^{st}$

Kökler:

$$Ke^{st}(s^2 + 2s + 5) = 0 \Rightarrow s^2 + 2s + 5 = 0 \Rightarrow s = -1 \pm j2$$

Akımın doğal tepki bileşeni: $i_n(t) = e^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t)$

3- Tepkinin zorlanmış bileşeni üstel Ie^{-4t} biçiminde olacaktır; bu çözüm KGY eşitliğinde kullanıldığında

$$(-4)^2 Ie^{-4t} + 2(-4)Ie^{-4t} + 5Ie^{-4t} = -40Ie^{-4t}$$

Buradan I=-3,08 bulunur. Bu durumda zorlanmış tepki $i_f(t) = -3,08e^{-4t}$

4- Tam tepki

$$i(t) = i_n(t) + i_f(t) = -3,08e^{-4t} + e^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t)$$

5- İki başlangıç koşuluna gerksinim vardır. $i(0^+)$ ve $di(0^+)/dt$. t=0'dan önce v(t)kaynak gerilimi, uzun zamandır sıfırdır, bu nedenle tüm akım ve gerilimler sıfıra gidecek biçimde devre durgun durumdadır.

$$i(0^-) = 0; v_c(0^-) = 0 \qquad \text{ve} \qquad i(0^+) = 0; v_c(0^+) = 0$$

olması gerekir. Bu durumda birinci başlangıç koşulu i(0+)=0 dır. İkinincisi, KGY eşitliğinden:

$$\frac{di(0^+)}{dt} + 2i(0^+) + v_V(0^+) = v_V(0^+) = 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{di(0^+)}{dt} = 10$$

6- i(0$^+$)=0 koşulundan

$$i(0^+) = 0 = -3,08 + A \Rightarrow A = 3,08$$

buradan

$$i(t) = -3,08e^{-4t} + e^{-t}(3,08\cos 2t + B\sin 2t)$$

B katsayısı

$$\frac{di(t)}{dt} = 12,32e^{-4t} + e^{-t}(-6,16\sin 2t + 2B\cos 2t) - e^{-t}(3,08\cos 2t + B\sin 2t)$$

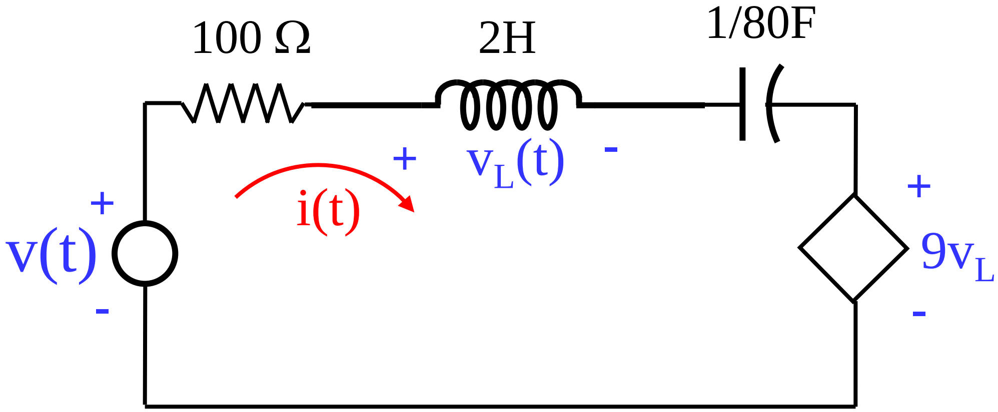
$$\frac{di(0^+)}{dt} = 10$$ Başlangıç koşulunun kullanılması ile

$$\frac{di(0^+)}{dt} = 10 = 12,32 + 2B - 3,08 \Rightarrow B = 0,38$$ bulunur.

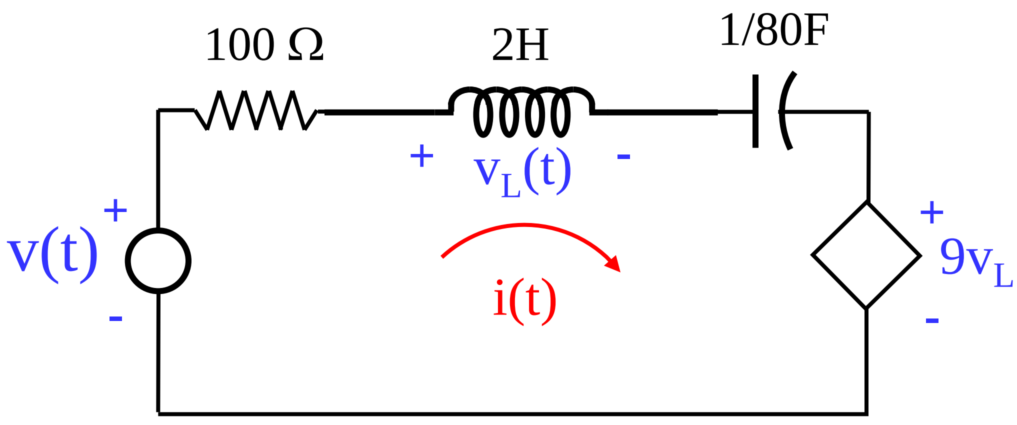
Tam Tepki:

$$i(t) = -3,08e^{-4t} + e^{-t}(3,08\cos 2t + 0,38\sin 2t)\ \ amper$$

Örnek 3.12: Aşağıdaki devrede bulunan $v(t)$ uyarıcısı, sıfırdan küçük zamanlar için sıfır ve $t > 0$ için 100 V'dur. Buna göre $t > 0$ için devre akımını bulunuz.



Çözüm:



1- Devre için KGY eşitliği

$$100i(t)+2\frac{di(t)}{dt}+80\int i(t)dt=v(t)-9v_L(t)$$

v(t)=100 V ve indüktans volt-amper bağıntısından bağımlı kaynak geriliminin

$$9v_L(t)=9\left(2\frac{di(t)}{dt}\right)$$

olduğundan

$$100i(t)+(2+18)\frac{di(t)}{dt}+80\int i(t)dt=100 \qquad \text{yazılır.}$$

İkinci türev alınırsa

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2}+5\frac{di(t)}{dt}+4i(t)=0$$

2- Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı sıfır olduğundan bu eşitlik zorlayıcısız bir eşitliktir. Bu denklemin çözümü (Doğal Tepki):

$$s^2 + 5s + 4 = 0 \Rightarrow s = -1 \; ve \; s = -4 \qquad \Rightarrow \qquad i_n(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-4t}$$

3- Zorlanmış tepki sıfırdır.

4- Tam Tepki:

$$i_n(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-4t}$$

5- İki başlangıç koşuluna gerksinim vardır. $i(0^+)$ ve $di(0^+)/dt$. Devre uzun zamandan beri durulmakta olduğundan $t=0^-$ da enerji depolanmamış durumdadır. Dolayısı ile

$$i(0^+) = i(0^-) = 0 \qquad \text{ve} \qquad v_c(0^+) = v_c(0^-) = 0$$

İkinci başlangıç koşulu, süreklilik ilkelerinden ve KGY $t=0^+$ anındaki değerinden bulunur.

$$100i(0^+) + 20\frac{di(0^+)}{dt} + v_C(0^+) = 100 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{di(0^+)}{dt} = 5 \quad \text{bulunur.}$$

6- Sınır koşullarından

$$i(0) = K_1 + K_2 = 0$$

buradan

$$\frac{di(0)}{dt} = -K_1 - 4K_2 = 5 \Rightarrow K_1 = -K_2 = 5/3$$

Tam tepki:

$$i(t) = \frac{5}{3}(e^{-t} - e^{-4t}) \;\; amper$$

olarak bulunur.