Ankara Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi, Fizik Mühendisliği Bölümü

FZM207

Temel Elektronik-I

Prof. Dr. Hüseyin Sarı

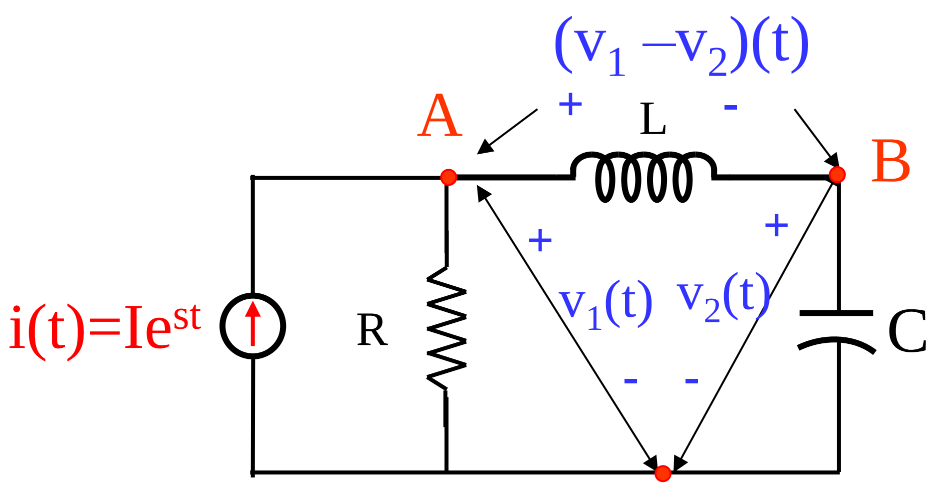
4. Bölüm

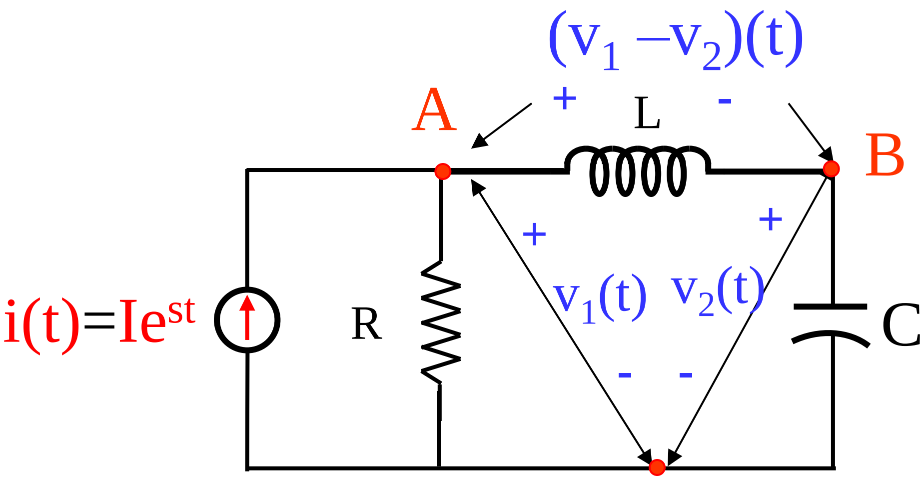
Üstel Uyarım ve Dönüşmüş Devreler-2

Dönüşmüş Devre

Önceki kısımlarda devre tepkilerinin çözümü tek bir diferansiyel denklemle betimlenebilen yalın devrelerdi. Bu kesimin amacı bu kavramları bir çok eş zamanlı denklemlerin ortak çözümünü gerekli kılan çok kavşaklı (düğüm noktalı) ve çok ilmekli devrelere genişletmektir.

Aşağıdaki devreyi düşünelim. Bu devrede akım kaynağı $i(t)=Ie^{st}$ dir. C sığası üzerindeki gerilim $v_2(t)$ istenilen tepkidir. Devrenin üç düğüm noktası olduğundan, çözüm için ***iki*** düğüm noktası (3-1=2) denklemi gereklidir.





A noktası için (KAY) :

$$Gv_1(t) + \frac{1}{L}\int \big(v_1(t) - v_2(t)\big)\,dt = i(t) = Ie^{st}$$

B noktası için (KAY):

$$-\frac{1}{L}\int \big(v_1(t) - v_2(t)\big)dt + C\frac{dv_2(t)}{dt} = 0$$

Her iki denklemin türevi alınırsa:

$$G\frac{dv_1(t)}{dt}+\frac{1}{L}(v_1(t)-v_2(t))=\frac{di(t)}{dt}=sIe^{st}$$

$$-\frac{1}{L}\left(v_1(t)-v_2(t)\right)+C\frac{d^2v_2(t)}{dt^2}=0$$

sadece türev içeren denklemler elde edilir. Denklemlerde iki bağımlı değişken vardır, $v_1(t)$ ve $v_2(t)$. Degişkenlerin zorlanmış bileşenleri:

$$v_{1f}(t)=V_1e^{st}$$

$$v_{2f}(t)=V_2e^{st}$$

Zorlanmış bileşenlerinin her ikisi de üstel terimleri içermektedir, sadece katsayılar farklıdır. Zorlanmış bileşenler yerlerine konursa:

$$sGV_1e^{st}+\frac{1}{L}(V_1-V_2)e^{st}=sIe^{st}$$

$$-\frac{1}{L}(V_1-V_2)e^{st}+s^2CV_2e^{st}=0$$

Yeniden düzenlenirse:

$$V_1\left(G+\frac{1}{sL}\right)-V_2\frac{1}{sL}=I$$

$$-V_1\frac{1}{sL}+V_2\left(sC+\frac{1}{sL}\right)=0$$

İki denklem, iki bilinmeyen (V_1 ve V_2) (I akımının verildiğini kabul ediyoruz).

V_2/I için ortak çözüm:

$$G\equiv\frac{1}{R}$$

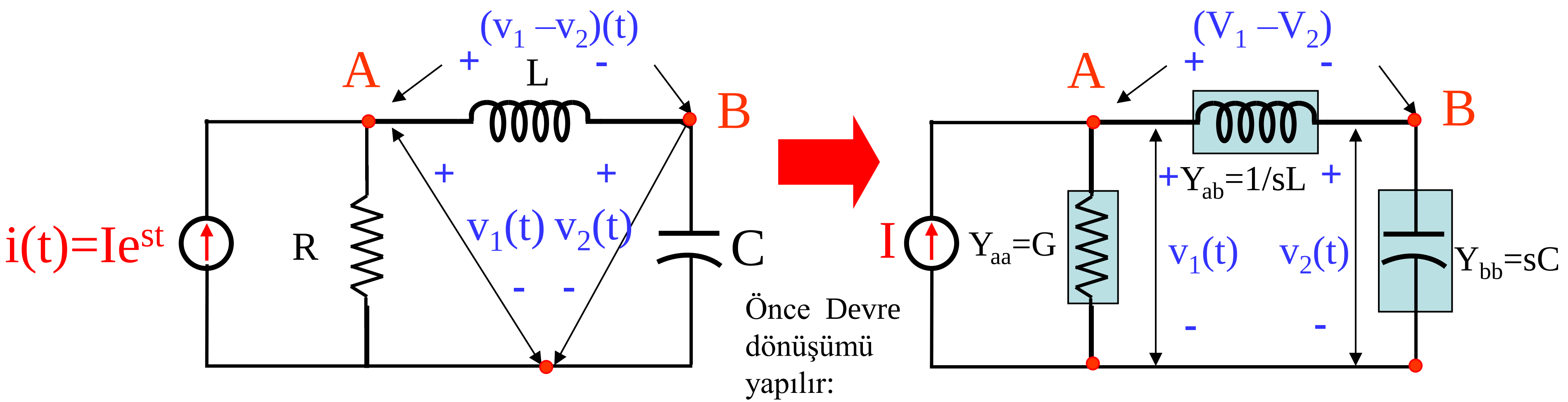
$$\frac{V_2}{I}=\frac{1}{s^2LCG+sC+G} \quad \Rightarrow \quad V_2=\frac{I}{s^2LCG+sC+G}$$

Zorlanmış bileşen: $v_{2f}(t)=V_2e^{st}$

$$v_{2f}(t)=\frac{Ie^{st}}{s^2LCG+sC+G}$$

elde edilir.

Devrenin çözümü doğrudan doğruya bu devrenin bir dönüşümü ile de anlaşılabilir. Dönüşmüş devre aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



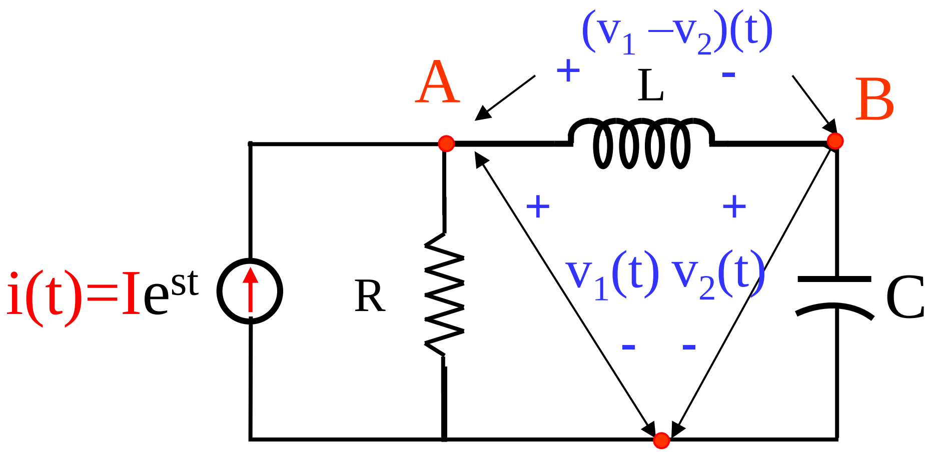
İletkenlik, indüktans ve sığa, edmitansa dönüştürülmüştür. Bölüm 2'de iletkenlik (G) terimlerinin yerine dönüşmüş devredeki edmitansların (Y) konması ile Düğüm-Noktası Gerilimi Yöntemi doğrudan uygulanabilir.

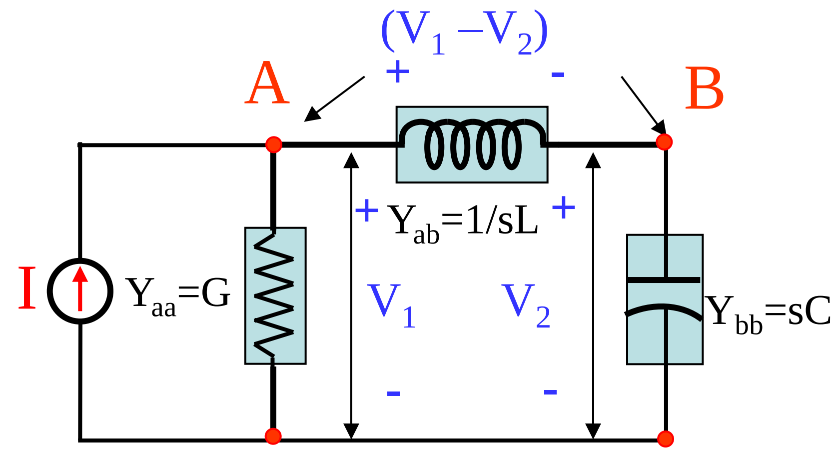
KAY (Düğüm-Gerilimi Yöntemi) Denklemleri:

A düğümü için $$V_1\left(G+\frac{1}{sL}\right)-V_2\frac{1}{sL}=I$$

B düğümü için $$-V_1\frac{1}{sL}+V_2\left(sC+\frac{1}{sL}\right)=0$$

Çözülmek istenen devrenin eşitlikleri diferansiyel denklemlerle zamana bağlı olarak ifade edildi (bağımsız değişken zaman). Dönüşmüş devre ve devreye karşılık gelen cebirsel denklemler s'ye yada frekans bölgesine dönüştürülmüştür. Dönüşümün etkisi açıkca görüldüğü gibi diferansiyel denklemler yerine cebirsel denklemlerle çözüm bulmamızı sağlamaktadır. Böylece Bölüm 2'de elde edilen dirençli devreler ile ilgili bütün yöntemler dönüşmüş devreler için de kullanılabilir.





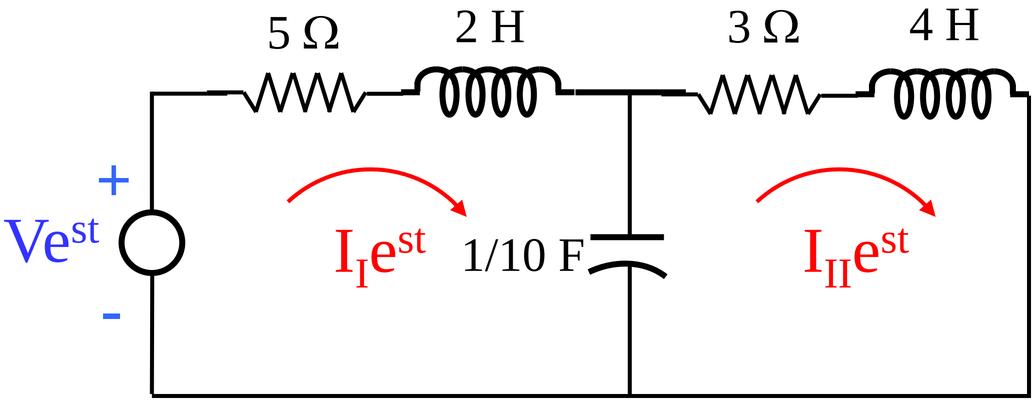
A düğümü için

$$Gv_1(t)+\frac{1}{L}\int\big(v_1(t)-v_2(t)\big)dt=i(t) \quad \Rightarrow \quad V_1\left(G+\frac{1}{sL}\right)-V_2\frac{1}{sL}=I$$

B düğümü için

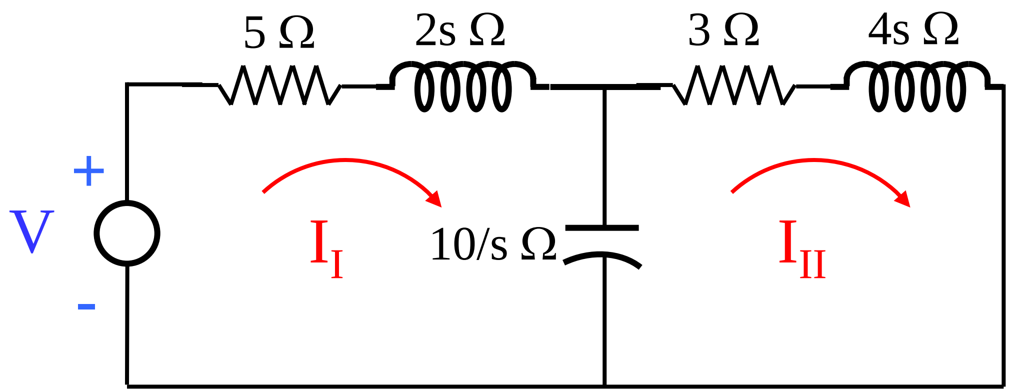
$$-\frac{1}{L}\int\big(v_1(t)-v_2(t)\big)dt+C\frac{dv_2(t)}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad -V_1\frac{1}{sL}+V_2\left(sC+\frac{1}{sL}\right)=0$$

Örnek 4.5: İmpedans parametrelerini kullanarak aşağıdaki devreyi dönüştürün.



Çözüm 4.5:

İmpedans değerleri kullanılarak dönüştürülmüş devre aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



İlmek-Akım denklemleri:

$$I_I\left(5+2s+\frac{10}{s}\right)-I_{II}\frac{10}{s}=V$$

$$-I_I\frac{10}{s}+I_{II}\left(3+4s+\frac{10}{s}\right)=0$$

İki denklem, iki bilinmeyen (I_I ve I_{II}) (V geriliminin verildiğini kabul ediyoruz).

I_{II}/V için bu denklemler ortak çözülürse:

$$\frac{I_{II}}{V}=\frac{1}{8s^3+26s^2+76s+80} \quad \Rightarrow \quad I_{II}=\frac{V}{8s^3+26s^2+76s+80}$$

Zaman uzayında akım ifadesi: $i_{II}(t)=I_{II}e^{st}$

$$i_{II}(t)=\left(\frac{V}{8s^3+26s^2+76s+80}\right)e^{st}$$ elde edilir.

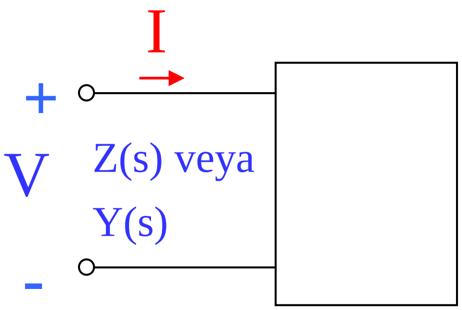
Giriş İmpedansı ve Edmitansı

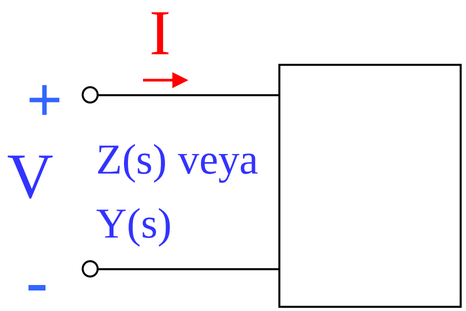
Pek çok elektrik devresinde, devre kaynağının uygulandığı bir çift giriş ucu vardır. Bu tür devrelere *iki uçlu devreler* ya da *tek girişli devreler* denir.

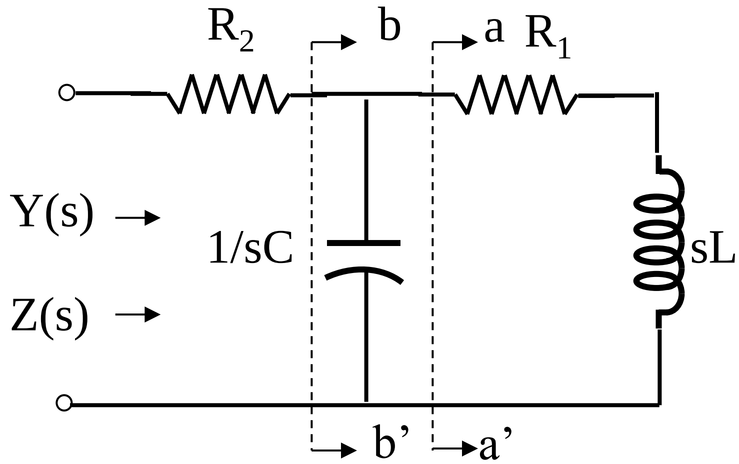
Bu devreler için kaynak geriliminin akıma oranına (V/I) *giriş* ya da *sürme-noktası impedansı* denir.

Bu oranın tersine (I/V) *giriş* ya da *sürme-noktası edmitansı* denir.

Giriş impedansı veya edmitansı Y(s) olan böyle bir devre iki uçlu bir kutu gibi gösterilebilir. İmpedans veya edmitans fonksiyonları, devrenin uç noktalarındaki davranışını tümüyle betimler. Bu değerler Bölüm 2.5'de betimlenen devre indirgeme yöntemi ile belirlenebilir.







Örnek olarak yandaki devreye bakalım:

$$Z_{aa'}(s) = R_1 + sL \qquad Y_{aa'}(s) = \frac{1}{Z_{aa'}(s)} = \frac{1}{R_1 + sL}$$

$$Y_{bb'}(s) = sC + Y_{aa'}(s)$$

$$Y_{bb'}(s) = sC + \frac{1}{R_1 + sL} = \frac{s^2 LC + sR_1 C + 1}{R_1 + sL}$$

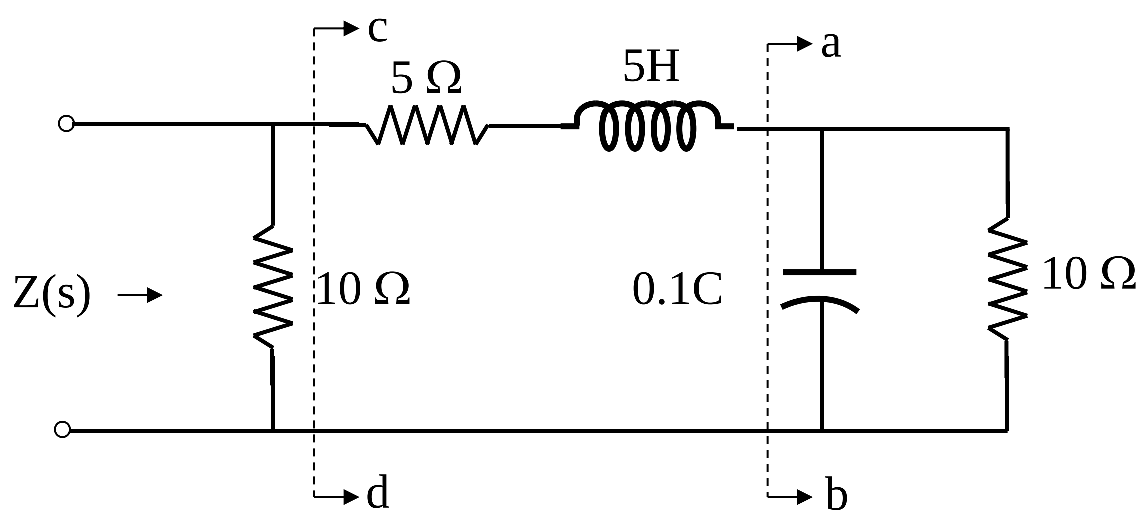
Giriş impedansı:

$$Z_{bb'}(s) = \frac{1}{Y_{bb'}(s)} = \frac{R_1 + sL}{s^2 LC + sR_1 C + 1} \qquad Z(s) = R_2 + \frac{R_1 + sL}{s^2 LC + sR_1 C + 1}$$

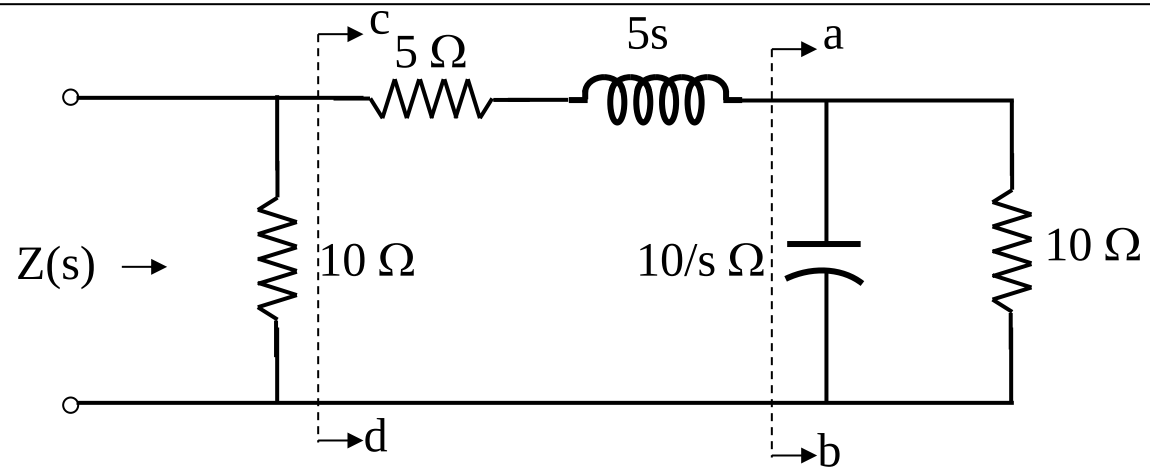
Giriş edmitansı, giriş impedansının tersidir.

$$Z(s) = \frac{s^2 R_2 LC + s(R_1 R_2 C + L) + R_1 + R_2}{s^2 LC + sR_1 C + 1} \qquad Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{s^2 LC + sR_1 C + 1}{s^2 R_2 LC + s(R_1 R_2 C + L) + R_1 + R_2}$$

Örnek 4.6: Aşağıdaki devrenin Z(s) giriş impedansını bulunuz.



Çözüm 4.6:



ab doğrusunun sağında kalan paralel RC devresinin edmitansını bulalım

$$Y_{ab}(s) = \frac{1}{10} + \frac{s}{10} = \frac{s+1}{10}$$

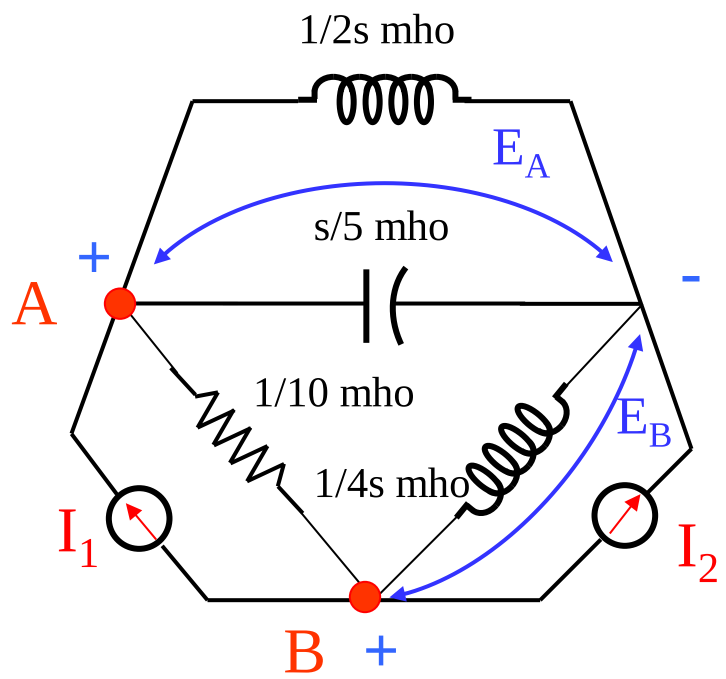
Seri bağlı RL'nin impedansını $Z_{ab}(s)$'ye ekleyelim

$$Z_{ab}(s) = \frac{1}{Y_{ab}(s)} = \frac{10}{s+1} \qquad Z_{cd}(s) = 5 + 5s + \frac{10}{s+1} = \frac{5s^2+10s+15}{s+1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{10} + \frac{1}{Z_{cd}(s)} \qquad Y(s) = \frac{1}{10} + \frac{s+1}{5s^2+10s+15} = \frac{5s^2+20s+25}{50s^2+100s+150}$$

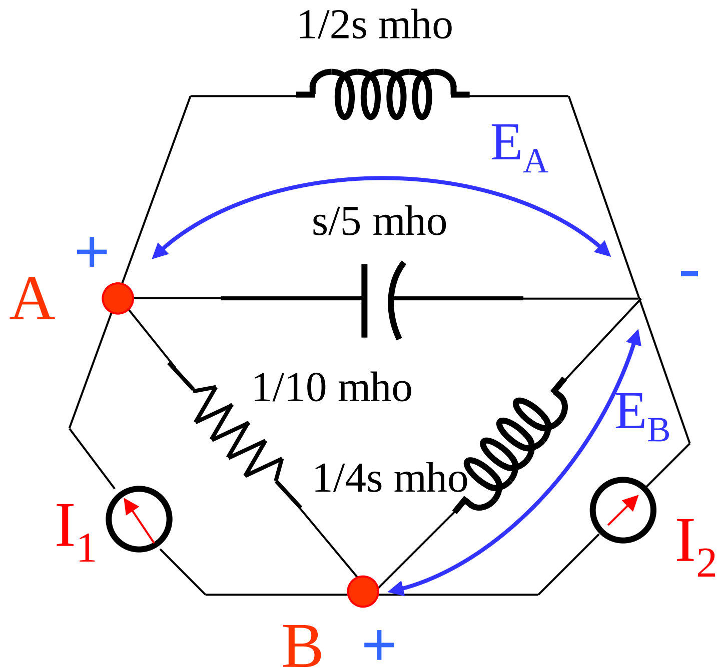
$$Y(s) = \frac{1}{10} + \frac{1}{Z_{cd}(s)} \qquad Z(s) = \frac{1}{Y(s)} = 10\frac{s^2+2s+3}{s^2+4s+5}$$

Örnek 4.7: Aşağıdaki devrede E_A gerilimini bulunuz.



Çözüm 4.7:

İstenen nicelik E_A gerilimi olduğu için, onun eksi ucu referans düğüm-noktası olarak seçilecektir, A ve B noktaları ve E_B gerilimi aşağıdaki şekildeki gibi tanımlanacaktır.



KAY (Düğüm Noktası Gerilimi) denklemleri:

A noktasında: $$E_A\left(\frac{1}{10}+\frac{s}{5}+\frac{1}{2s}\right)-E_B\frac{1}{10}=I_1$$

B noktasında: $$-E_A\frac{1}{10}+E_B\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{4s}\right)=-(I_1+I_2)$$

Bu tür denklemler Cramer kuralının kullanılması ile kolaylıkla çözülebilir.

$$\left(\frac{2s^2+s+5}{10s}\right)E_A-\frac{1}{10}E_B=I_1$$

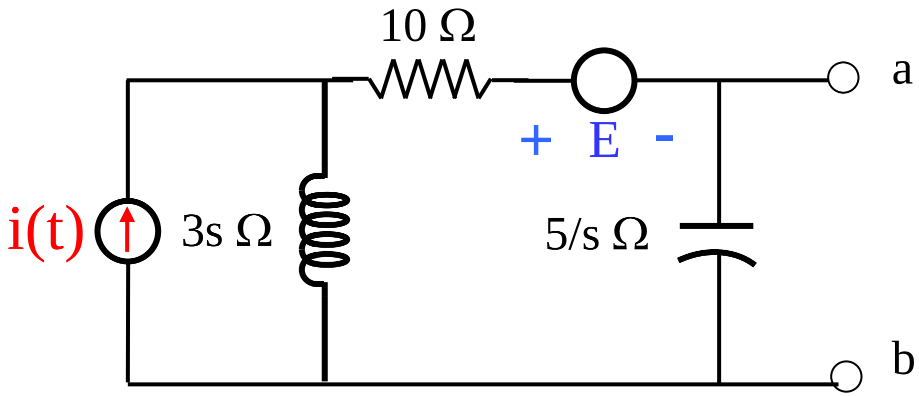
$$-\frac{1}{10}E_A+\left(\frac{2s+5}{20s}\right)E_B=-(I_1+I_2)$$

$$E_A=\frac{\begin{vmatrix} I_1 & -\frac{1}{10} \\ -(I_1+I_2) & \frac{2s+5}{20s} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{2s^2+s+5}{10s} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2s+5}{20s} \end{vmatrix}} \Rightarrow E_A=\frac{50sI_1-50s^2I_2}{4s^3+10s^2+15s+25}$$

E_A'nın payındaki iki terimden birincisi bir çarpan olarak I_1'i, ikincisinin ise I_2'yi bulundurduğuna dikkat ediniz. Bu sonuç, iki kaynağın etkisi ile doğan toplam devre tepkisinin ayrı ayrı tepkilerin toplamı ve bu tepkilerin birbirinden bağımsız olduğunu belirleyen üst-üste binme ilkesini bir sonucudur.

$$E_A=\frac{50sI_1}{4s^3+10s^2+15s+25}+\frac{-50s^2I_2}{4s^3+10s^2+15s+25}$$

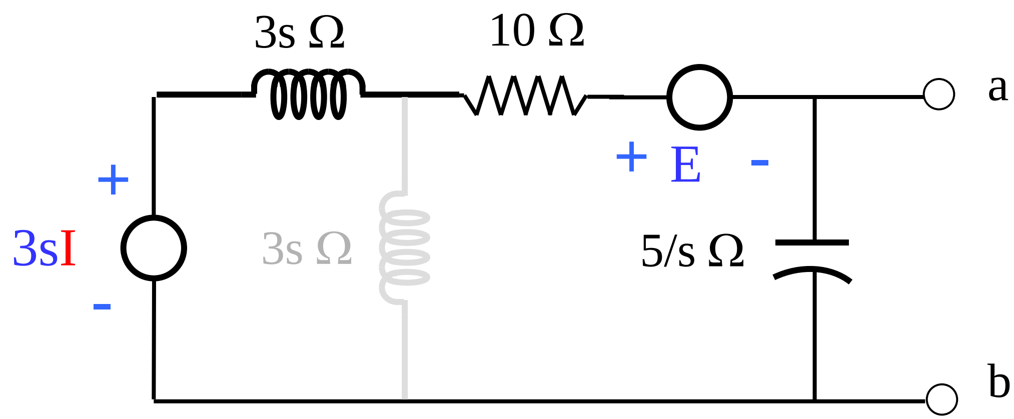
Örnek 4.8: Aşağıdaki devrede ab uçlarından görülen Thevenin eşdeğer devresini bulunuz.



Çözüm 4.8:

Thevenin eşdeğeri, kaynak dönüşümü ve devre indirgenmesi yöntemlerinin kullanılmasıyla bulunabilir. Önce, paralel olan I akım kaynağı ve 3s Ω'luk impedans, seri bağlı bir gerilim kaynağı 3sI ve 3s Ω'luk impedansa dönüştürülür. Bu dönüşümün sonucu aşağıdaki devrede gösterilmiştir. Seri bağlı impedans ve seri gerilim kaynakları aşağıdaki gibi birleştirilmiştir.

Thevenin eşdeğer geriliminin (E_o) bulunması:



Thevenin eşdeğer gerilimi olan açık-devre gerilimi E_o iki basamakta bulunabilir.

Devrede dolanan Akım:

$$I = \frac{3sI - E}{3s + 10 + 5/s} = \frac{s(3sI - E)}{3s^2 + 10s + 5}$$

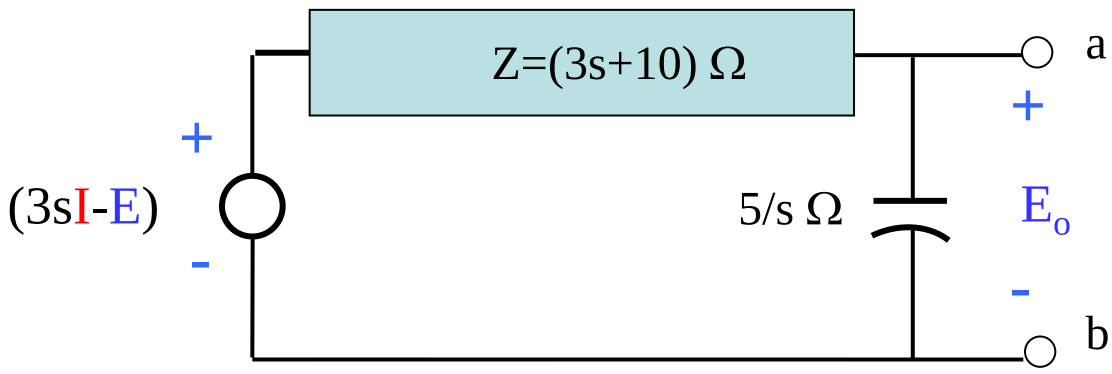
$V = IZ$

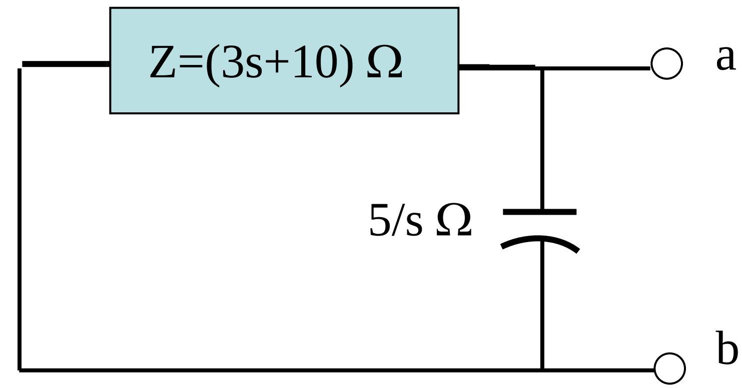
ab uçları arasındaki (sığa üzerindeki) Gerilim:

$$E_o = I\left(\frac{5}{s}\right) = \frac{15sI - 5E}{3s^2 + 10s + 5}$$

Thevenin eşdeğer empedansının bulunması:

Aşağıdaki devrede güç kaynağı etkisiz duruma getirilirse (kısa devre yapılırsa) ab uçlarından bakıldığı zaman Z impedansı ve 5/s Ω'luk direnç paralel olarak birleştirilir.

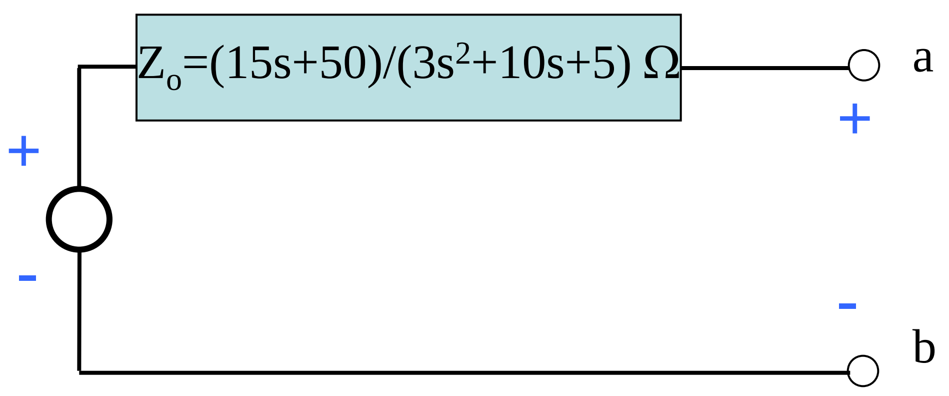




$$Z_o = \frac{(3s+10)(5/s)}{(3s+10)+5/s} = \frac{15s+50}{3s^2+10s+5}$$

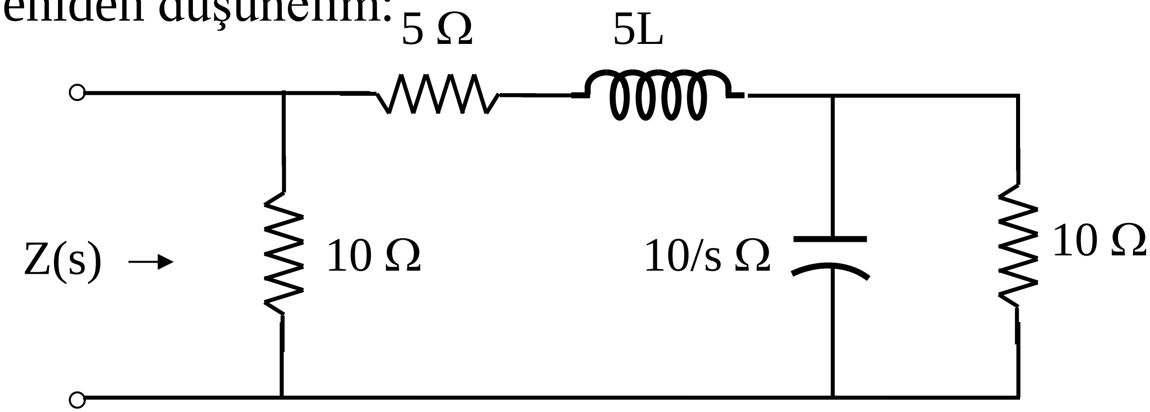
Thevenin eşdeğer devresi:

$$E_o = \frac{15sI-5E}{3s^2+10s+5}$$



Devre Fonksiyonlarının Genel Değerlendirilmesi

Aşağıdaki devreyi yeniden düşünelim:



Bu devrenin giriş impedansı yeniden yazılırsa:

$$Z(s) = 10\,\frac{s^2+2s+3}{s^2+4s+5} = \frac{Ve^{st}}{Ie^{st}}$$

Uyarım: Ie^{st}

Tepki: Ve^{st}

Bu cebirsel denklem yeniden düzenlenirse:

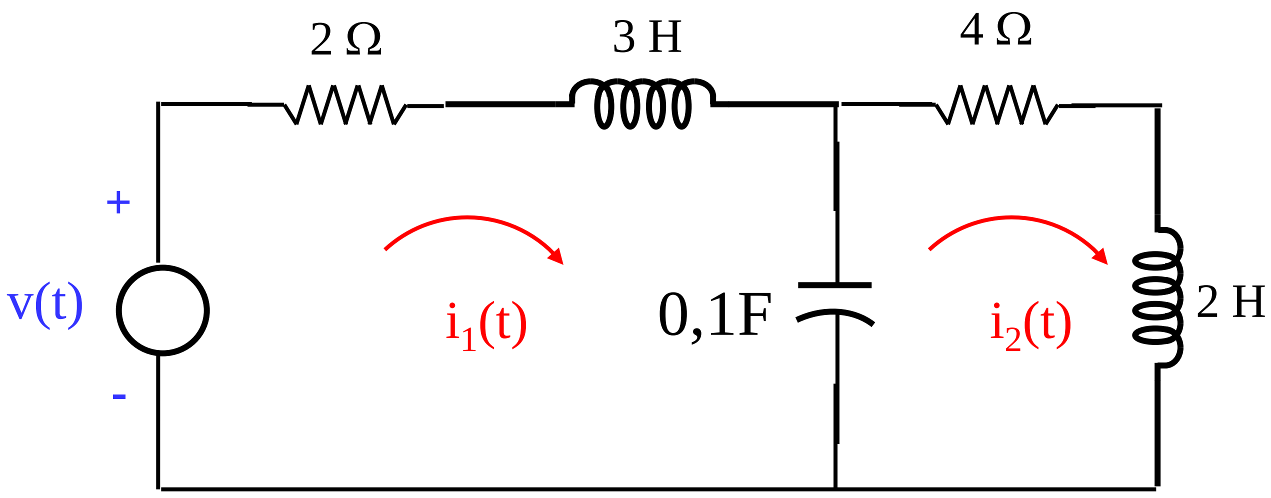
$$s^2Ve^{st} + 4sVe^{st} + 5Ve^{st} = 10s^2Ie^{st} + 20sIe^{st} + 30Ie^{st}$$

sVe^{st} terimi Ve^{st} nin zamana göre birinci türevi vs.

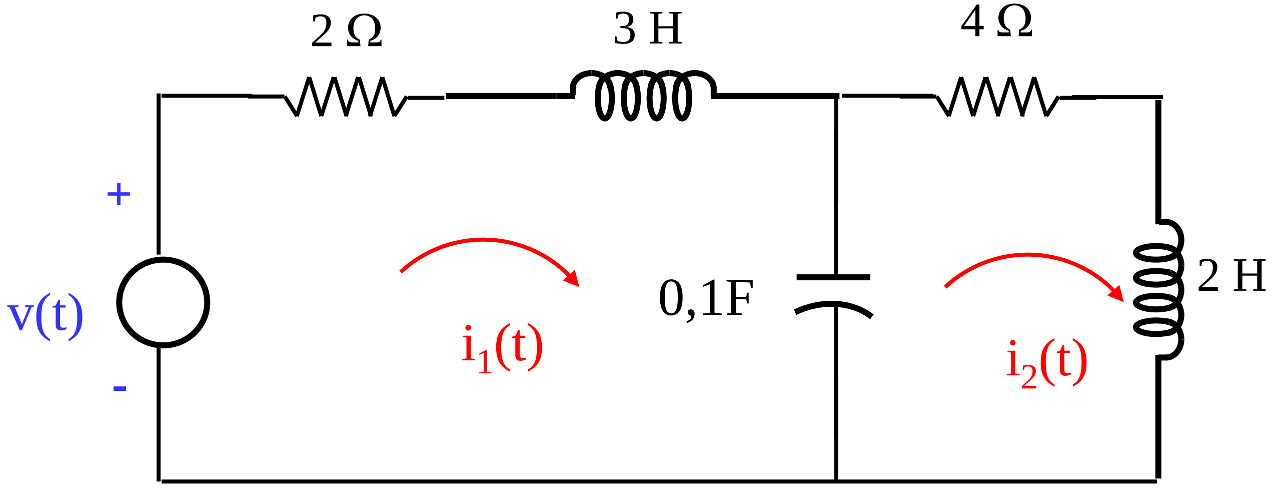
$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + 4\frac{dv(t)}{dt} + 5v(t) = 10\frac{d^2i(t)}{dt^2} + 20\frac{di(t)}{dt} + 30i(t)$$

Bir devrenin uyarım ve tepkisini birbirine bağlayan diferansiyel denklemlerin devre fonksiyonlarından elde edilebildiği görülür. Bu gerçek, devrelerin ve denklemlerin frekans bölgesine dönüşümünün üstel uyarım ile devrelerin çözümünün ötesinde bir yarar sağladığı sonucuna götürür. Dönüşüm, en genel ortak diferansiyel denklemlerin çözümünün kolay ve yalın bir yöntemini verir.

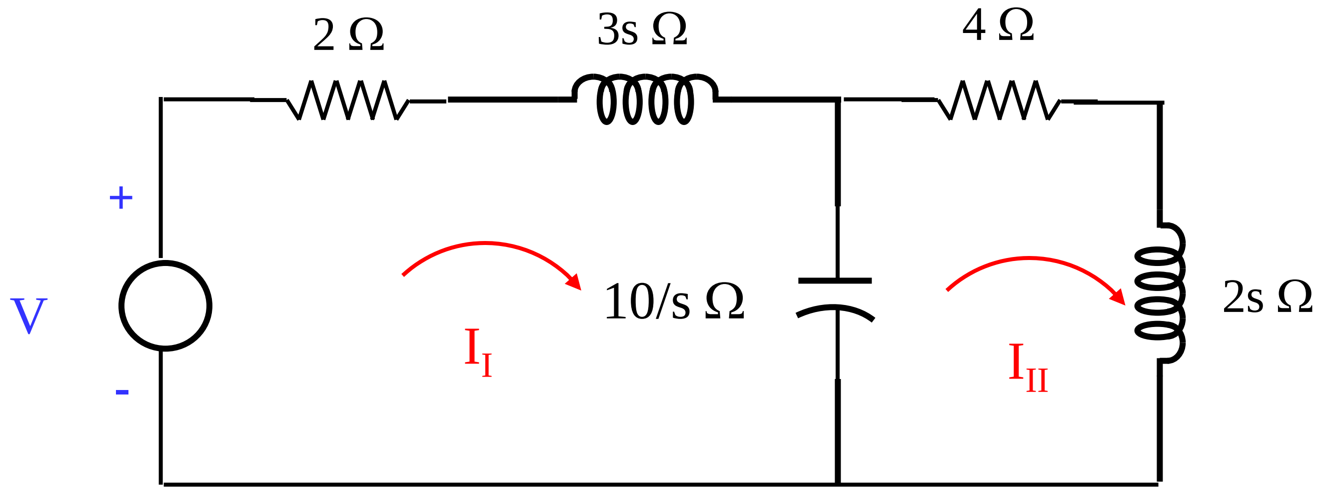
Örnek 4.10: Aşağıdaki devrede $i_2(t)$ akımını $v(t)$ gerilimine bağlayan diferansiyel denklemi bulunuz.



Çözüm 4.10:



Devre önce frekans bölgesine dönüştürülür:



Dönüşmüş devre için KGY (ilmek) denklemleri:

$$(2+3s+\frac{10}{s})I_I-\frac{10}{s}I_{II}=V \qquad -\frac{10}{s}I_I+(4+2s+\frac{10}{s})I_{II}=0$$

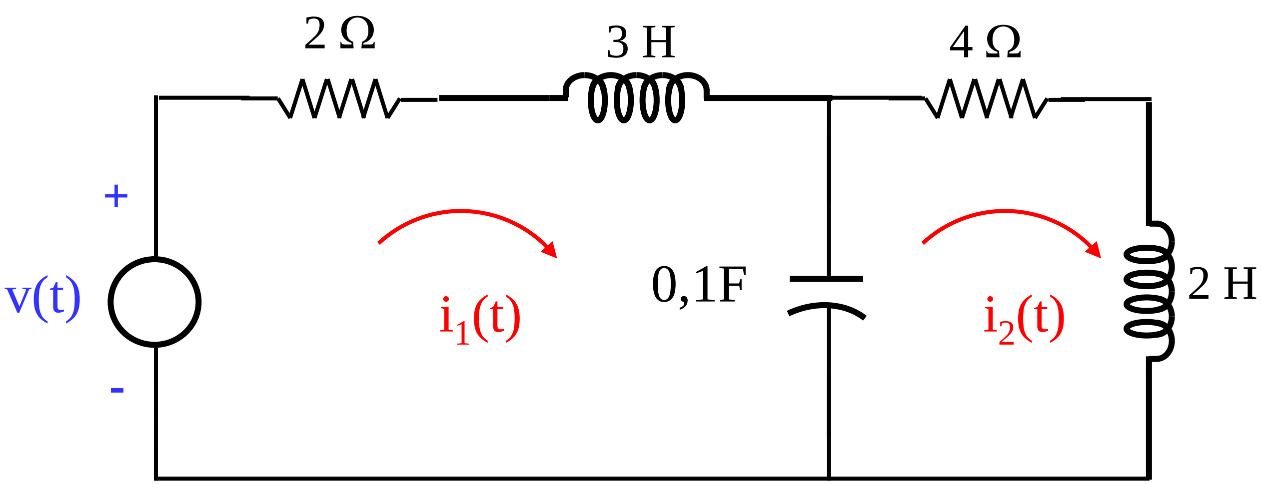
Bu denklemlerin I_{II} için ortak çözümü devre fonksiyonunu verir

$$\frac{I_{II}}{V}(s) = -\frac{1,67}{s^3 + 2,67s^2 + 9,66s + 10}$$

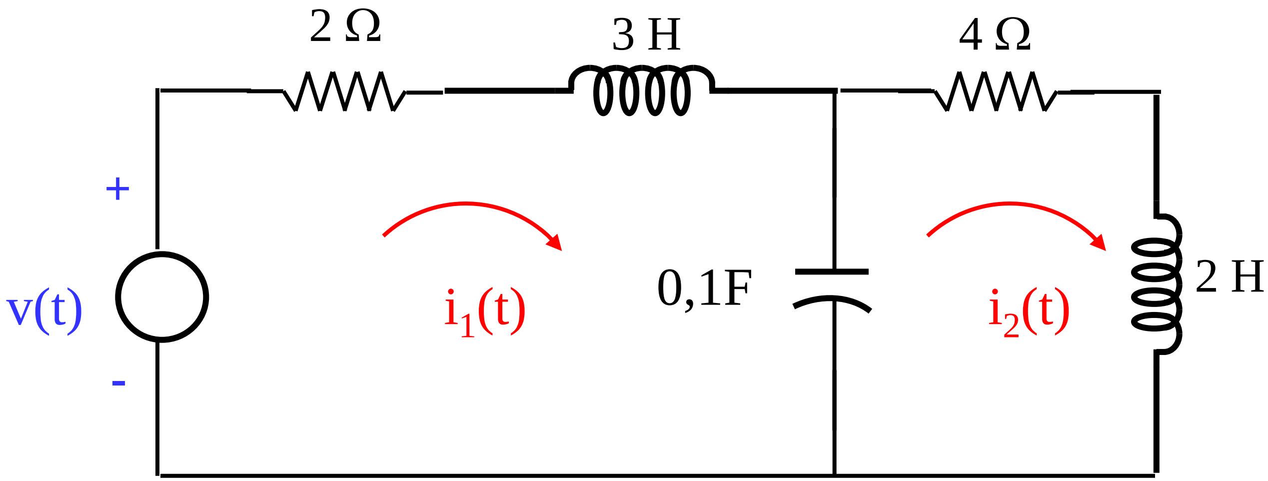
Buna karşılık gelen diferansiyel denklem ise:

$$\frac{d^3 i_2(t)}{dt^3} + 2,67\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + 9,66\frac{d i_2(t)}{dt} + 10 i_2(t) = 1,67 v(t)$$ olur.

Örnek 4.11: Örnek 4.10'deki devrede bulunan $i_1(t)$ ve $i_2(t)$ akımlarının doğal tepkilerinin biçimlerini bulunuz.



Çözüm 4.11:



Tanımlayıcı devre denklemleri.

$$(2+3s+\frac{10}{s})I_1-\frac{10}{s}I_2=V \qquad -\frac{10}{s}I_1+(4+2s+\frac{10}{s})I_2=0$$

Bu denklemlerin çözümleri:

$$\frac{I_1}{V_1}(s)=-\frac{0,33(s^2+2s+5)}{s^3+2,67s^2+9,67s+10} \qquad \frac{I_2}{V_1}(s)=-\frac{1,67}{s^3+2,67s^2+9,66s+10}$$

Bu devre fonksiyonlarının her ikisinin de paydası aynıdır. Bu paydanın kökleri -1,27 ve -0,70±j2,72 dir. Bu sebepten akımların her ikisi için de doğal tepki:

$$K_1e^{-1,27t}+K_2e^{(-0,7\pm j2,72)t}+K_3e^{(-0,7-j2,72)t}$$

veya

$$K_1e^{-1,27t}+e^{-0,7t}(A\cos 2,72t+B\sin 2,72t)$$