Ankara Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi, Fizik Mühendisliği Bölümü

FZM207

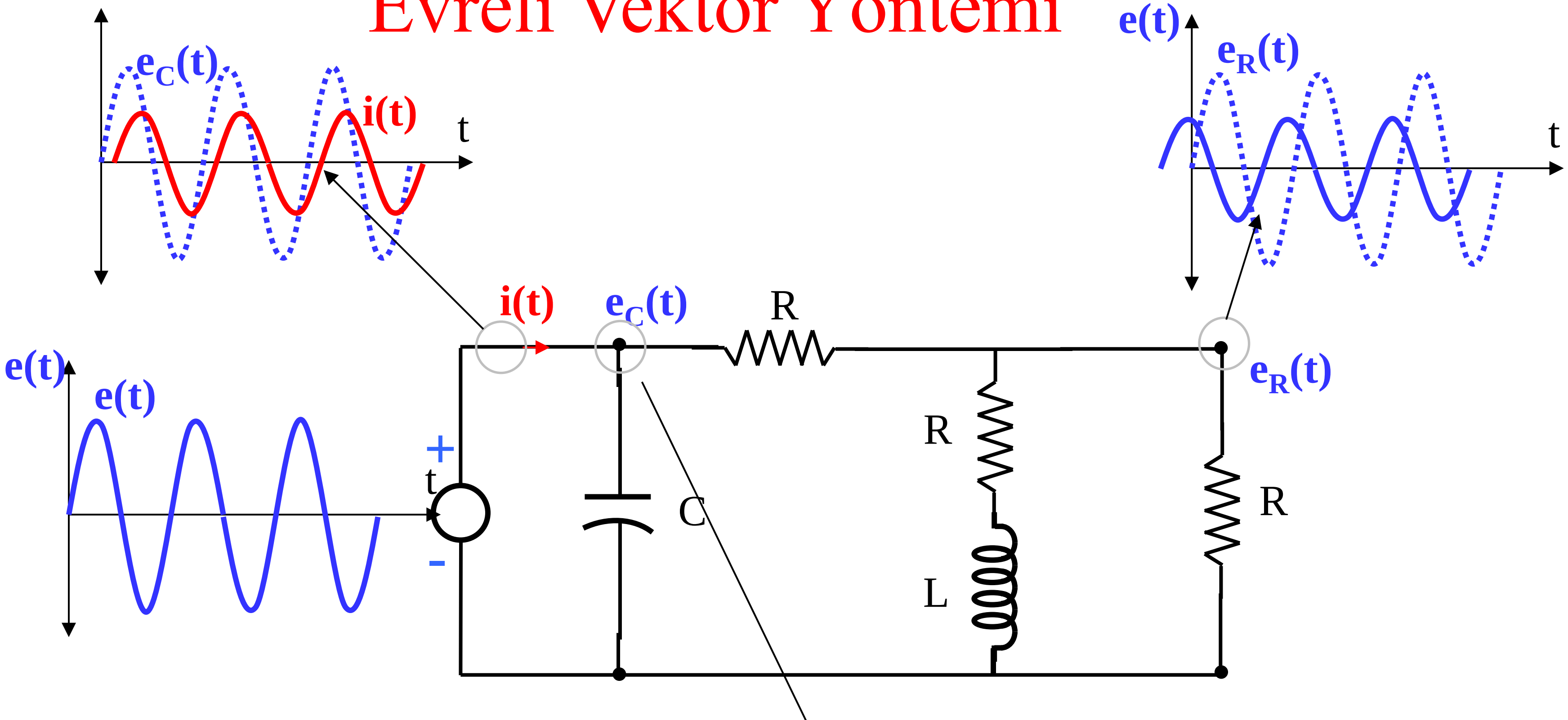
Temel Elektronik-I

Prof. Dr. Hüseyin Sarı

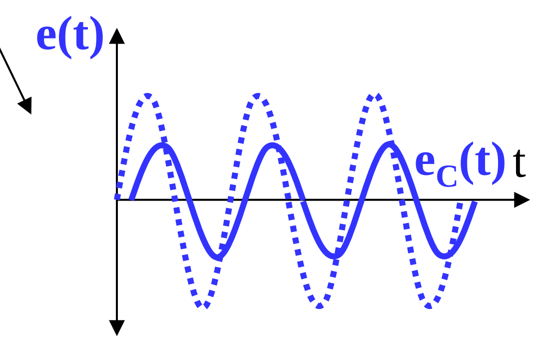
5. Bölüm

Kararlı Durum A. A. Devreleri-2

Evreli Vektör Yöntemi



Sinyalin frekansı (ω) her noktada aynı, sadece **büyüklük** ve **faz açısı (θ)** değişiyor

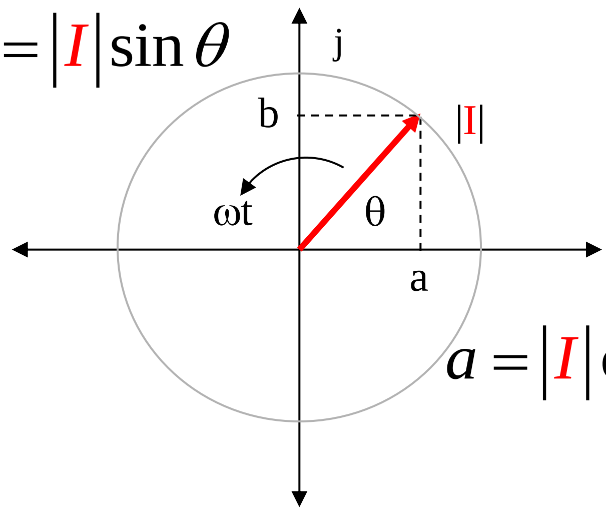


Evreli Vektör Yöntemi

Evreli (faz) Vektör Yöntemi, devrelere uygulanan ***<u>akım ve gerilim uyarımlarının tümü aynı frekanslı sinüssel olduğu zaman</u>*** devre problemlerini çözmek için kullanılan pratik bir yöntemdir.

$$i(t)=\sqrt{2}I_{etk}\cos(\omega t+\theta)$$

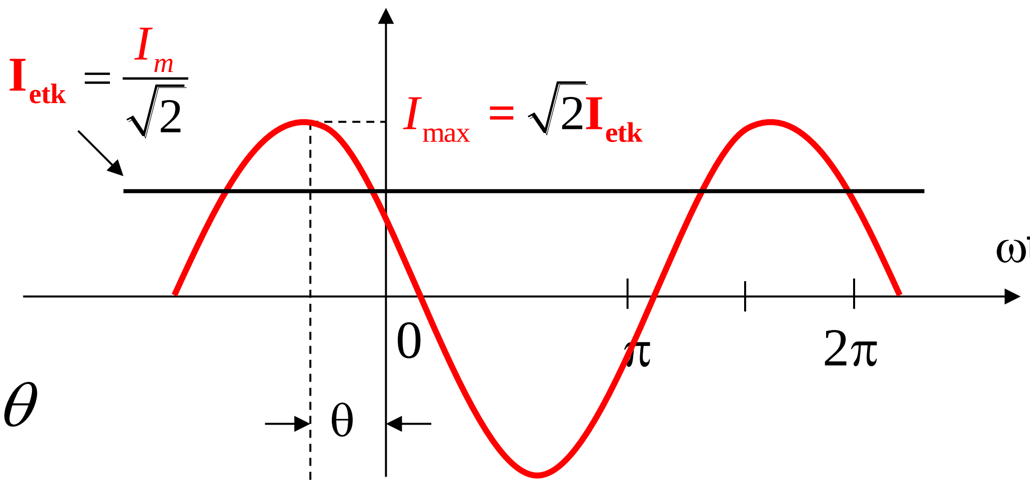
$$b=|I|\sin\theta$$



$$a=|I|\cos\theta$$

$$\mathbf{I}_{\mathbf{etk}}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$I_{\max}=\sqrt{2}\mathbf{I}_{\mathbf{etk}}$$



Bir vektör, karmaşık sayı ile ifade edilebilir.

$$\mathbf{I}=a+jb$$

$$|I|=\sqrt{(a+jb).(a-jb)}$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}$$

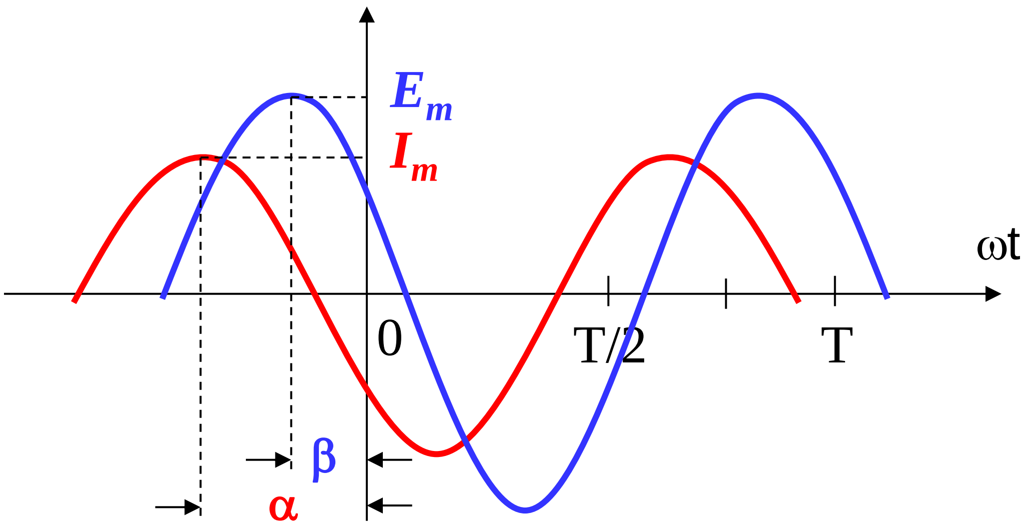
$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$i(t)=\sqrt{2}I_{etk}\cos(\omega t+\theta)$$

$$\mathbf{I}=I\angle\theta$$

$$A=Etkindeğer\angle fazaçısı$$

Akım ve Gerilimin Evreli Vektör Gösterimi



$$i(t) = \sqrt{2} I_{etk} \cos(\omega t + \alpha) \qquad e(t) = \sqrt{2} E_{etk} \cos(\omega t + \beta)$$

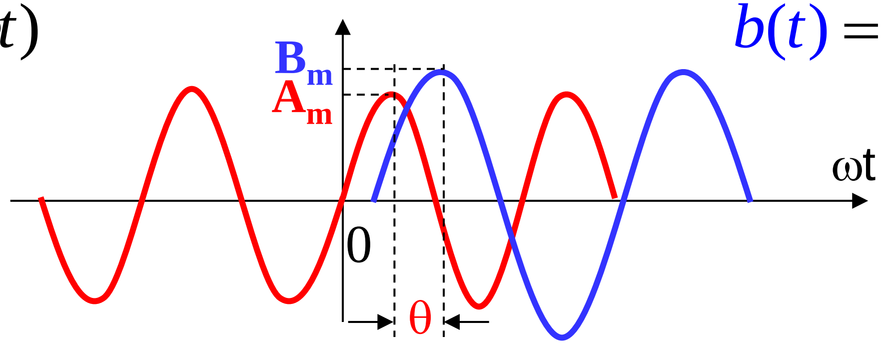
Evreli vektör gösterimi: $\mathbf{I} = I\angle\alpha$ $\qquad \mathbf{E} = E\angle\beta$

Evreli Vektör yönteminde sinüssel akım ve gerilimleri göstermek için I ve E nicelikleri kullanılır; KOK değerlerine eşit büyüklükleri ve t=0 anında argümanın değerine eşit bir açı değeri vardır.

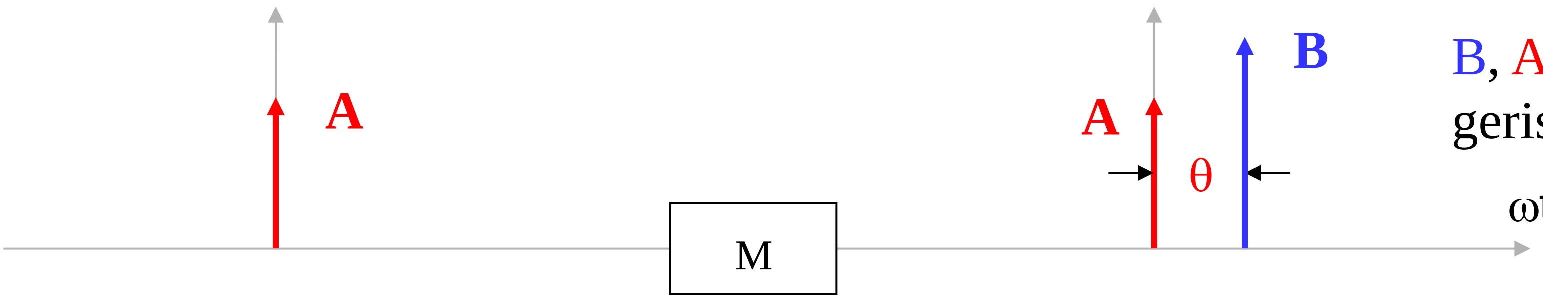
Evreli Vektör Yöntemi

$$a(t) = \sqrt{2}A_{etk}\cos(\omega t) \qquad \vec{A} = |A|\angle 0^o$$

$$b(t) = \sqrt{2}B_{etk}\cos(\omega t + \theta) \qquad \vec{B} = |B|\angle\left(0^o + \theta\right)$$



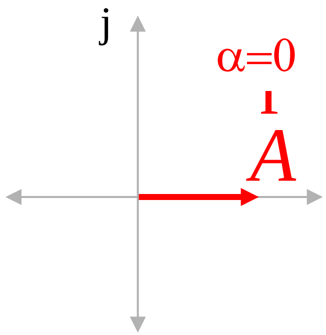
Zaman ekseninde:



B, A'nın gerisinde

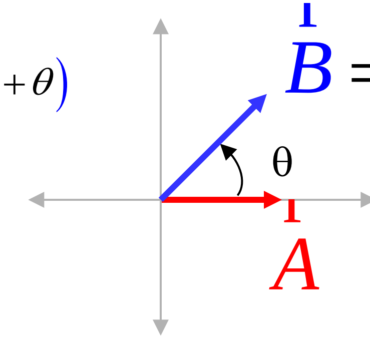
Karmaşık düzlemde:

$$A = a + jb$$
$$= a$$



$$\vec{B} = M\vec{A}$$

$$\vec{B} = M\vec{A} = M\,|A|\angle 0^o = |B|\angle\left(0^o + \theta\right)$$



$$\vec{B} = M\vec{A}$$

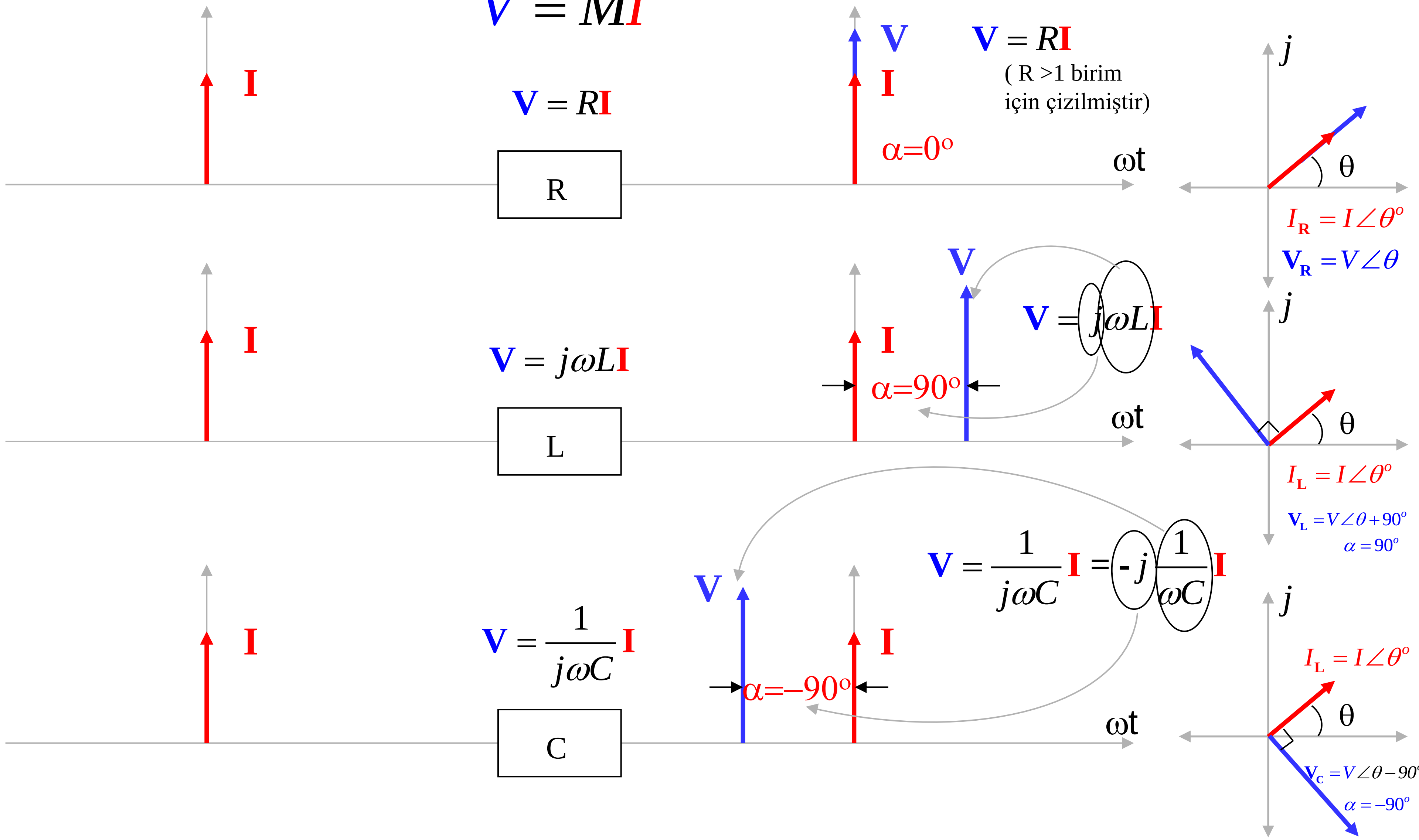
$$\vec{A} = |A|\angle 0^o$$

$$\vec{B} = |B|\angle\left(0^o + \theta\right)$$

Evreli Vektör Yöntemi

$$i(t) = \sqrt{2} I_{etk} \cos(\omega t + \theta) \qquad v(t) = \sqrt{2} V_{etk} \cos(\omega t + \theta + \alpha)$$

$$\mathbf{I} = I \angle \theta^o \qquad \mathbf{V} = M \mathbf{I} \qquad \mathbf{V} = V \angle \left(\theta^o + \alpha^o \right)$$



Evreli Vektör Yöntemi-Hesaplamalar-1

Evreli Vektör notasyonundan Karmaşık Sayı notasyonuna dönüştürme:

$$\mathbf{A} = |A|\angle\theta \;\Rightarrow\; \mathbf{A} = |A|\cos\theta + j(|A|\sin\theta) = a + jb$$

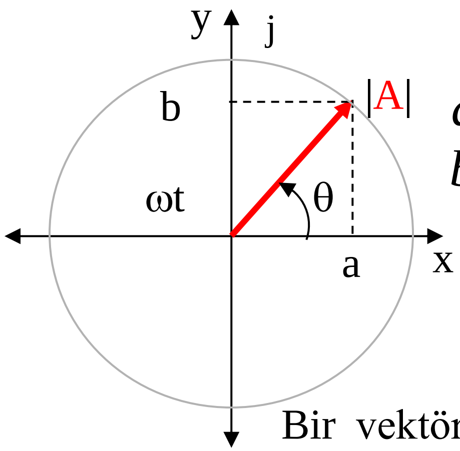
Karmaşık Sayı notasyonundan Evreli Vektör notasyonuna dönüştürme:

$$\mathbf{A} = a + jb \;\Rightarrow\; \boxed{|A| = \sqrt{(a+jb).(a-jb)} = \sqrt{a^2+b^2} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)} \;\Rightarrow\; \mathbf{A} = |A|\angle\theta$$

İşlemler:

$$\mathbf{A} = A\angle\theta_A$$

$$\mathbf{B} = B\angle\theta_B$$



$$a = |A|\cos\theta$$
$$b = |A|\sin\theta$$

Bir vektör **A**, karmaşık sayı ile ifade edilebilir.

Bölme:

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{|A|\angle\theta_A}{|B|\angle\theta_B} = \left(|A|/|B|\right)\angle\left(\theta_A - \theta_B\right)$$

Çarpma:

$$\mathbf{A.B} = \left(A\angle\theta_A\right).\left(B\angle\theta_B\right) = \left(A.B\right)\angle\left(\theta_A + \theta_B\right)$$

Toplama/Çıkarma:

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \left(A\angle\theta_A\right) \pm \left(B\angle\theta_B\right) = \left(a_1 + a_2 j\right) \pm \left(b_1 + b_2 j\right) = \left(a_1 \pm b_1\right) + j\left(a_2 \pm b_2\right) \equiv c + jd$$

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \sqrt{c^2 + d^2}\angle\tan^{-1}(d/c)$$

Evreli Vektör Yöntemi-Örnek

Evreli Vektör notasyonundan Karmaşık Sayı notasyonuna dönüştürme:

$$\mathbf{A} = 5\angle 30^o \;\Rightarrow\; \mathbf{A} = 5\cos(30^o) + j(5\sin(30^o)) = 4{,}3 + j2{,}5$$

Karmaşık Sayı notasyonundan Evreli Vektör notasyonuna dönüştürme:

$$\mathbf{A} = 3 + j4 \;\Rightarrow\; \boxed{\begin{array}{l} |A| = \sqrt{(3+j4).(3-j4)} = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \\ \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{4}{3}\right) = 53{,}1^o \end{array}} \;\Rightarrow\; \mathbf{A} = 5\angle 53{,}1^o$$

İşlemler:

$$\mathbf{A} = 5\angle 30^o$$

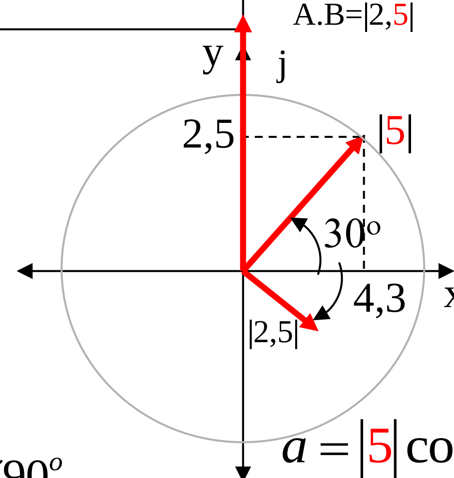
$$\mathbf{B} = 2\angle 60^o$$

Bölme:

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{|5|\angle 30^o}{|2|\angle 60^o} = (|5|/|2|)\angle(30^o - 60^o) = 2{,}5\angle -30^o$$

Çarpma:

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = (5\angle 30^o).(2\angle 60^o) = (5.2)\angle(30^o + 60^o) = 10\angle 90^o$$
$$= j10$$



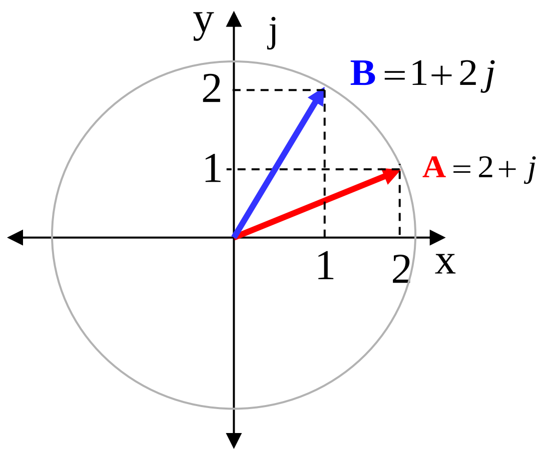
$$a = |5|\cos(30^o) = 4{,}3$$
$$b = |5|\sin(30^o) = 2{,}5$$

Toplama/Çıkarma:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (5\angle 30^o) + (2\angle 60^o) = (4{,}3 + j2{,}5) + (1 + j1{,}73) = (4{,}3+1) + j(2{,}5+1{,}73) \cong 5{,}3 + j4{,}2$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \sqrt{(5{,}3)^2 + (4{,}2)^2}\angle \tan^{-1}(4{,}2/5{,}3) \cong 6{,}8\angle 86^o$$

Evreli Vektör ve Karmaşık Sayı Gösterimi



$$\mathbf{A} = 2 + j \qquad \mathbf{A} = 5\angle 26^o$$

$$\mathbf{B} = 1 + 2j \qquad \mathbf{B} = 5\angle 63^o$$

Çarpma:

Evreli vektörle

$$\mathbf{A.B} = \left(\sqrt{5}\angle 26^o\right).\left(\sqrt{5}\angle 63^o\right) = \left(\sqrt{5}.\sqrt{5}\right)\angle\left(26^o + 63^o\right) = 5\angle 90^o$$

Karmaşık sayıyla:

$$A.\mathbf{B} = (2 + j).(1 + j2) = (2 + 4j + j - 2) = (2 + 4j + j - 2) = 5j$$

$$|A.\mathbf{B}| = \sqrt{(5j).(-5j)} = \sqrt{25} = 5 \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{0}\right) = 90^o$$

$$\mathbf{A.B} = 5\angle 90^o$$

Bölme:

Evreli vektörle

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{|5|\angle 26^o}{|5|\angle 63^o} = \left(|5| / |5|\right)\angle\left(26^o - 63^o\right) = 1\angle -37^o$$

Karmaşık sayıyla:

$$\frac{A}{\mathbf{B}} = \frac{2 + j}{1 + j2} = \frac{(2 + j).(1 - j2)}{(1 + j2).(1 - j2)} = \frac{2 - 4j + j + 2}{5} = \frac{4 - 3j}{5} = \frac{4 - 3j}{5} = 4/5 - 3/5j$$

$$\left|\frac{A}{\mathbf{B}}\right| = \sqrt{(4/5)^2 + (-3/5)^2} = 1 \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{-3/5}{4/5}\right) = -37^o$$

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = 1\angle -37^o$$

Evreli Vektör Yöntemi

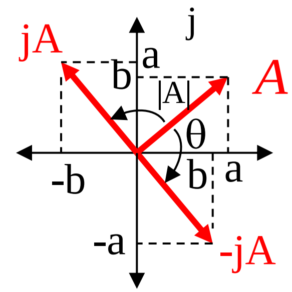
Direnç, indüktans ve sığa gibi üç devre öğesindeki akım ve gerilim arasındaki bağıntılar, dönüştürülmüş devreleri tanımlayan eşitliklere uyarlanır. İmpedans ve edmitans parametrelerini içeren bağıntılar:

Direnç: $\mathbf{V} = R.\mathbf{I}$

İndüktans: $\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$

Sığa: $\mathbf{V} = \dfrac{1}{j\omega C}\mathbf{I} = -j\dfrac{1}{\omega C}\mathbf{I}$

Karmaşık Sayı



$$A = a + jb$$

$$jA = j(a + jb) = -b + ja$$

$$(-j)A = (-j)(a + jb) = b - ja$$

j (-j) ile çarpmak vektörü 90^o (-90^o) döndürür.

İndüktans ve sığa gibi devre elemanlarında, akım ve gerilim arasında 90^o faz farkı vardır (bobinde gerilim, akımın önünde; sığa'da ise gerilim akımın gerisindedir).

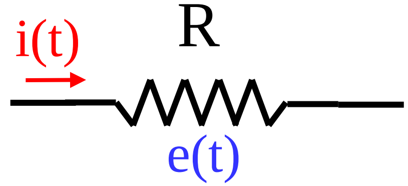
Genel durum için: $\mathbf{V} = Z\mathbf{I}$ **Z**: İmpedans

(Z'nin değerine bağlı olarak **gerilim**, **akımın** önünde veya arkasında olabilir)

Direnç

I vektörü, R skaler bir sayı (pozitif) ile çarpıldığı için yeni V vektörü I ile aynı doğrultudadır, sadece büyüklüğü değişmiştir. Bunun anlamı direnç üzerinde akım ve gerilim aynı fazdadır, biri maksimum iken diğeri de maksimumdur.

$$\mathbf{V} = R.\mathbf{I}$$



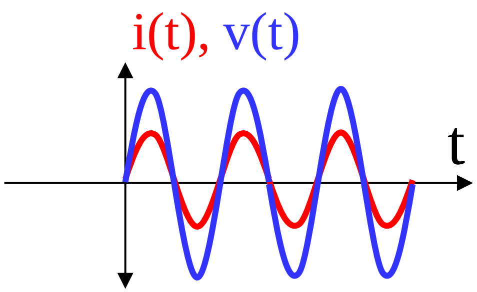
$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta)$$

$$i(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \theta)$$

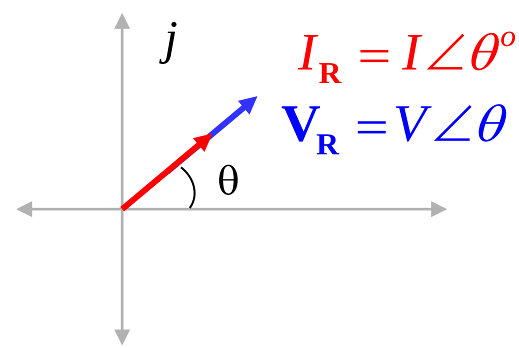
$$I \equiv I_{etk}$$

$$e(t) = R i(t) = E_m \sin(\omega t + \theta)$$

$$\mathbf{V_R} = R\mathbf{I} = RI\angle\theta^o$$



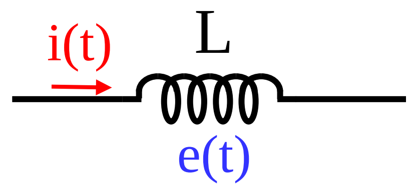
Gerilim ve akım aynı evreli-Birinin maksimum olduğu yerde diğeri de maksimumdur. (R>1 için çizilmiştir)



İndüktans

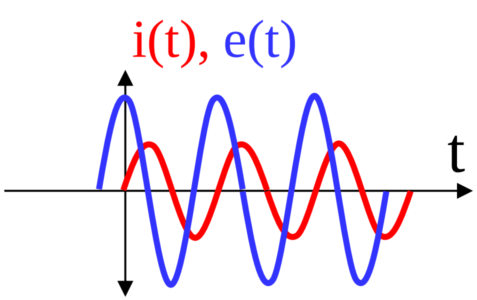
I vektörü, (jωL) gibi bir karmaşık sayı ile çarpıldığı için yeni **V** vektörü, **I** vektörünün 90° önündedir, **V** vektörünün büyüklüğü ise ωL kadar değişmiştir. Bunun anlamı, indüktans üzerinde akım ile gerilim arasında 90°'lik faz farkı vardır, yani indüktanstan geçen akım, indüktans gerilimini 90° geriden izler (biri maksimum iken diğeri minimumdur).

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta)$$



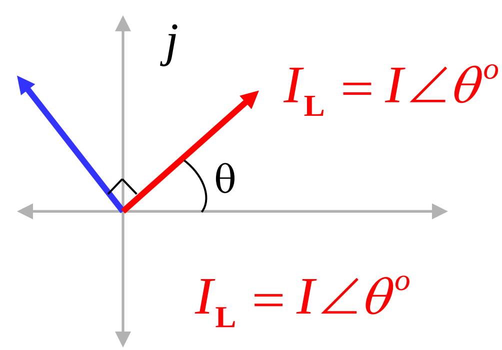
$$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$$

$$e(t) = L\frac{di(t)}{dt} = E_m \cos(\omega t + \theta) = E_m \sin(\omega t + \theta + 90^o)$$



Gerilim v(t), akımın i(t), 90° önündedir.

$$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I} = \omega L\angle\theta + 90^o$$



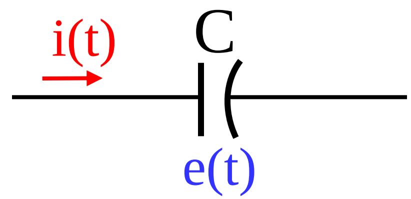
$$I_L = I\angle\theta^o$$

$$\mathbf{V_L} = V\angle\theta + 90^o$$

Sığa

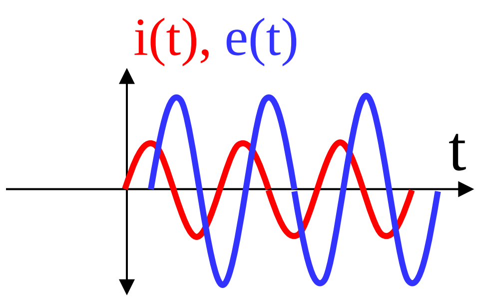
I vektörü, (1/jωC) gibi bir karmaşık sayı ile çarpıldığı için yeni **V** vektörü, **I** vektörünün 90^o gerisindedir, **V** vektörünün büyüklüğü ise 1/ωC kadar değişmiştir. Bunun anlamı Sığa üzerinden akan akım ile gerilim arasında 90^o'lik faz farkı vardır, yani akım gerilimin 90^o önündedir (biri maksimum iken diğeri minimumdur).

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta)$$
$$i(t) = \sqrt{2} I_{etk} \sin(\omega t + \theta)$$



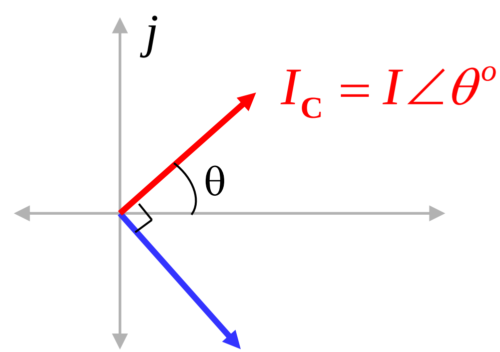
$$\mathbf{V} = \frac{1}{j\omega C}\mathbf{I} = -j\frac{1}{\omega C}\mathbf{I}$$

$$e(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt = -E_m \cos(\omega t + \theta) = E_m \sin(\omega t + \theta - 90^o)$$



Gerilim e(t), akımın i(t) 90^o gerisinde.

$$I_C = I\angle\theta^o$$
$$\mathbf{V}_C = V\angle\theta - 90^o$$



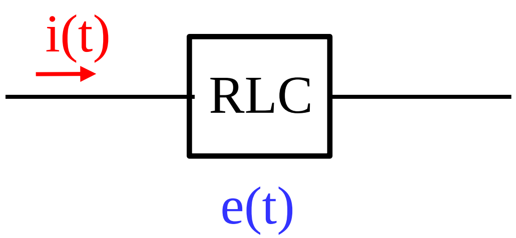
$$\mathbf{V}_C = j\omega L \mathbf{I}_C = \omega L\angle\theta - 90^o$$

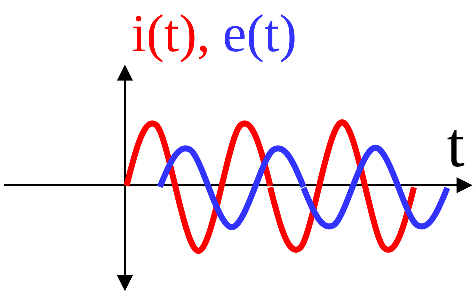
Genel Durum

I vektörü, ***Z*** gibi bir karmaşık sayı ile çarpıldığı için yeni V vektörü, I vektörünün θ kadar önünde veya gerisindedir.

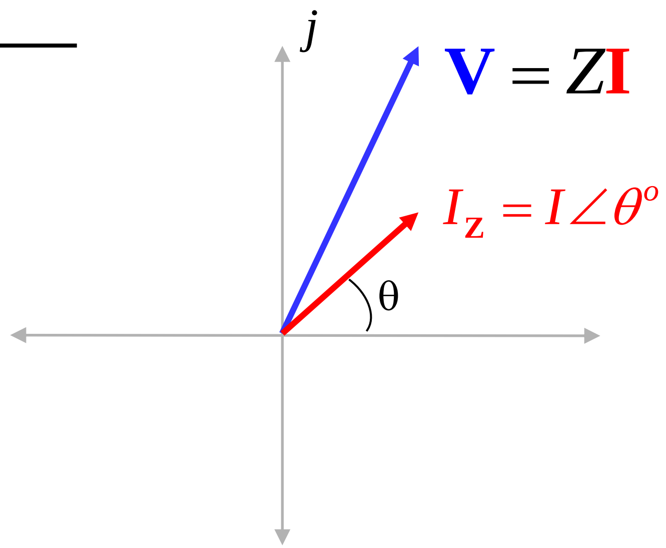
$$\mathbf{V} = Z\mathbf{I}$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta)$$



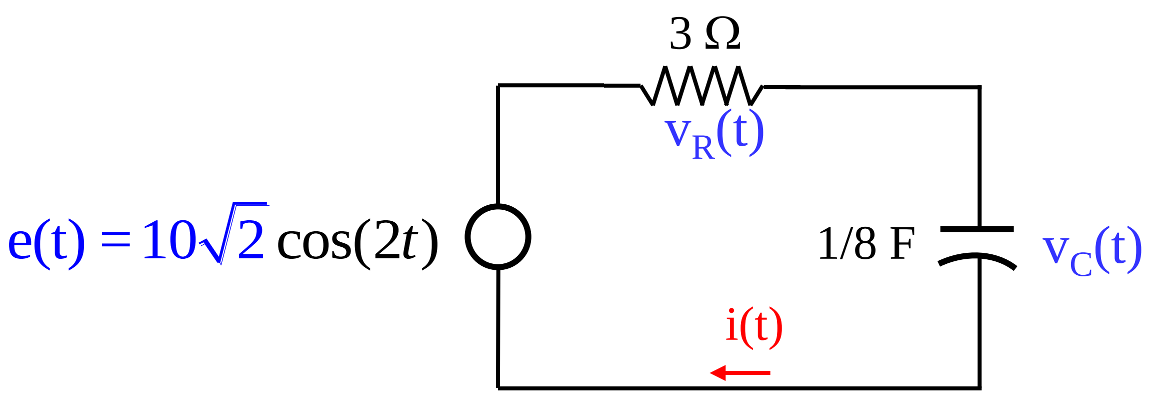


Gerilim e(t), ile akım i(t) arasında θ° kadar faz farkı vardır.

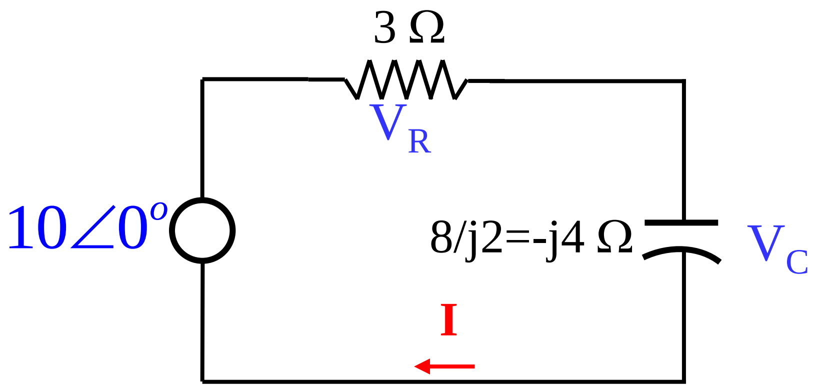


V vektörünün ne kadarlık döneceğini ***Z*** vektörü belirler.

Örnek 5.2: Aşağıdaki devrede i(t) akımını bulunuz. Yalnız zorlanmış tepki istenmektedir. Evreli-vektör yöntemini kullanın ve devre gerilimlerini ve akımını gösteren bir evreli-vektör gösterimi çiziniz.



Çözüm 5.2:



$$\omega = 2 \ \ rad/s$$

$$\mathrm{e(t)} = 10\sqrt{2}\cos(2t) \Rightarrow \mathbf{V} = 10\angle 0^o$$

Direnç: $\mathbf{V} = 3\mathbf{I}$

Sığa: $\mathbf{V} = \dfrac{1}{j\omega C}\mathbf{I} = \dfrac{1}{j2(\frac{1}{8})}\mathbf{I} = -j4\mathbf{I}$

Kirchhoff Gerilim Yasası (KGY): $\mathbf{V_R} + \mathbf{V_C} = 10\angle 0^o$

$$3\mathbf{I} - j4\mathbf{I} = 10\angle 0^o \Rightarrow \mathbf{I}(3 - j4) = 10\angle 0^o$$

$$\mathbf{I} = \frac{10\angle 0^o}{|(3 - j4)|}$$

$$(3 - j4) = |(3 - j4)| \angle - \tan^{-1}(b/a)^o$$

$$|(3 - j4)| = \sqrt{(3 - j4).(3 + j4)} = \sqrt{(3^2 + 4^2)} = 5$$

$$\angle - \tan(b/a)^o = \angle - \tan^{-1}(-4/3)^o = -53{,}1^o$$

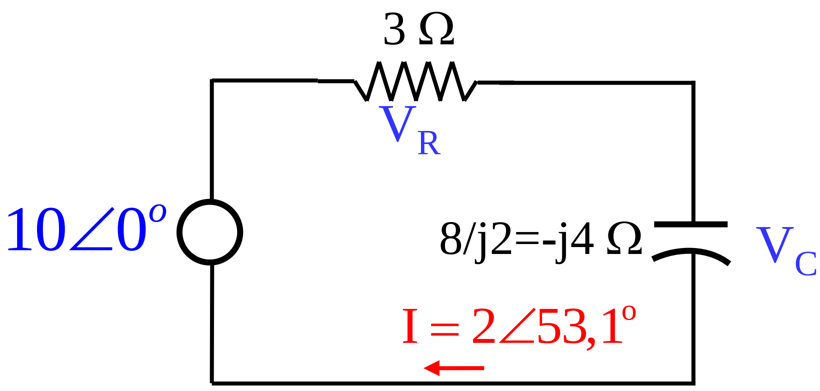
$$(3 - j4) = 5\angle -53{,}1^o$$

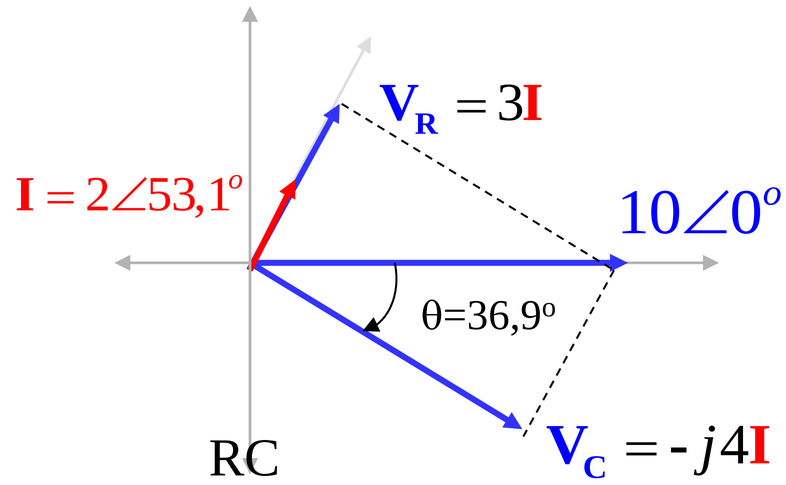
$$\mathbf{I} = \frac{10\angle 0^o}{5\angle -53{,}1^o} = 2\angle 53{,}1^o$$

$$\boxed{\mathbf{I} = 2\angle 53{,}1^o}$$

$$i(t) = 2\sqrt{2}\cos(2t + 53{,}1^o)$$

Evreli Vektör Akım-Gerilim Bağıntıları

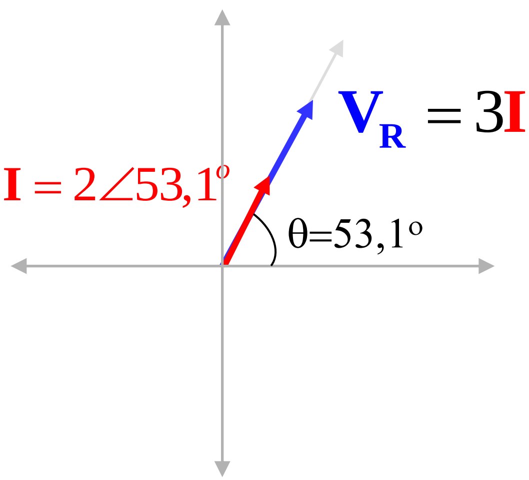




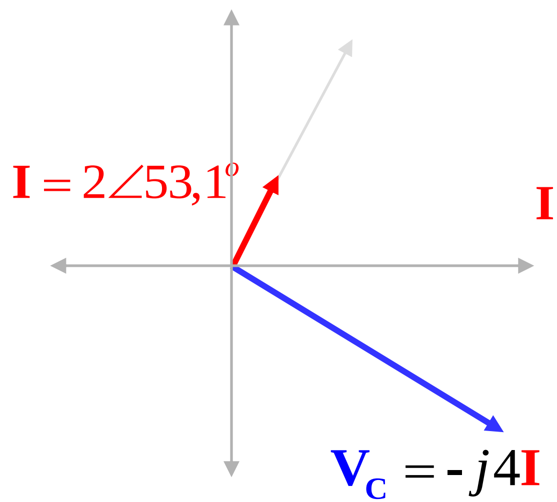
Direnç

Sığa

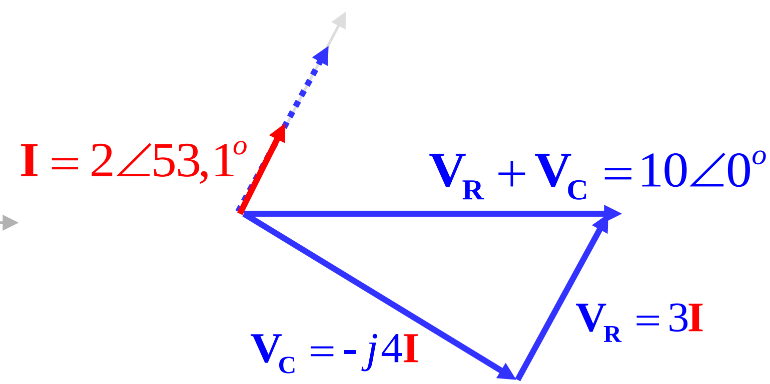
RC



Akım ve Gerilim aynı fazda.



Akım, Gerilimin 90° gerisindedir.



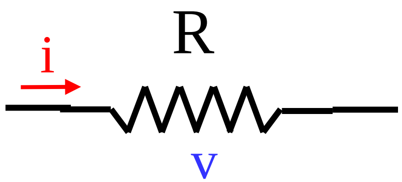
Akım, Gerilimin 53,1° gerisindedir.

Evreli-vektör gösterimi, üç gerilim ve bir akım evreli vektörünü göstermektedir. V_R ve V_C'nin toplamının kaynak gerilimi ve vektörünü oluşturduğuna dikkat ediniz. V_C, I'nın 90° gerisinde bulunur; V_R ise akım doğrultusundadır (aynı evrede).

Evreli Vektör Akım-Gerilim Bağıntıları

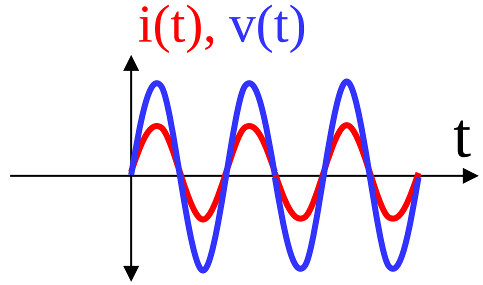
Evreli Vektör Gösterimi

Direnç

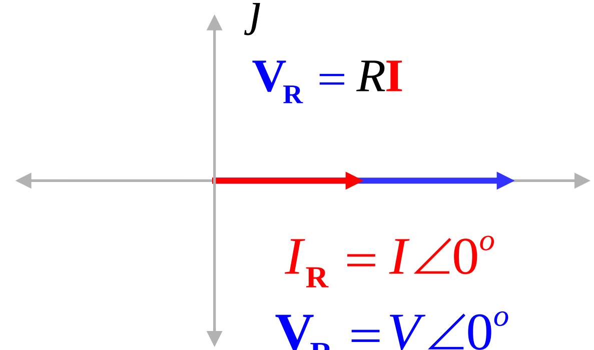


$$i(t) = I_m \sin(\omega t)$$

$$e(t) = R i(t) = E_m \sin(\omega t)$$



Gerilim ve **akım** aynı evreli

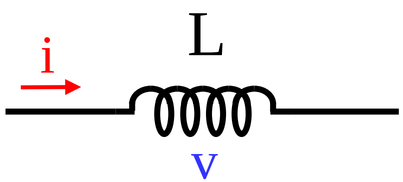


$$\mathbf{V_R} = R\mathbf{I}$$

$$I_{\mathbf{R}} = I\angle 0^o$$

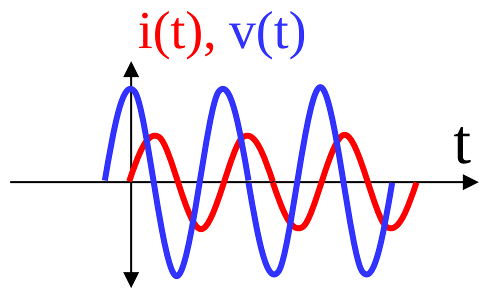
$$\mathbf{V_R} = V\angle 0^o$$

İndüktans

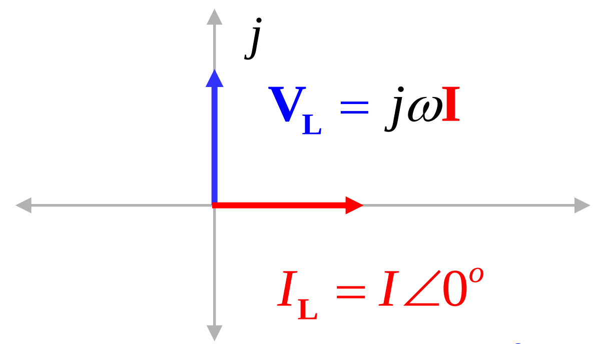


$$i(t) = I_m \sin(\omega t)$$

$$e(t) = L\frac{di(t)}{dt} = E_m \cos(\omega t)$$



Gerilim, **akım**ın 90° önünde

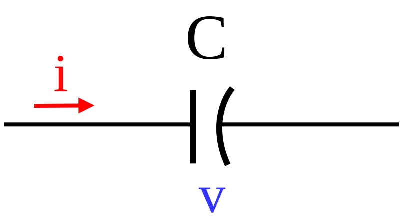


$$\mathbf{V_L} = j\omega\mathbf{I}$$

$$I_{\mathbf{L}} = I\angle 0^o$$

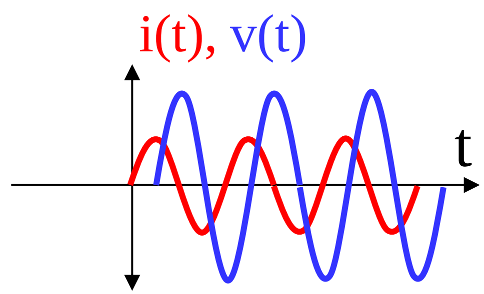
$$\mathbf{V_L} = V\angle 90^o$$

Sığa

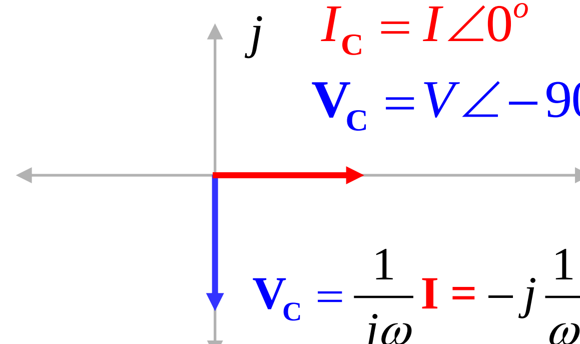


$$i(t) = I_m \sin(\omega t)$$

$$e(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt = -E_m \cos(\omega t)$$



Gerilim, **akım**ın 90° gerisinde

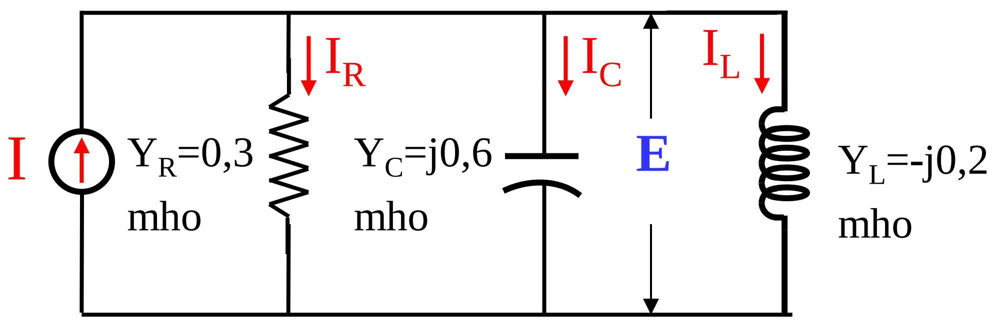


$$I_{\mathbf{C}} = I\angle 0^o$$

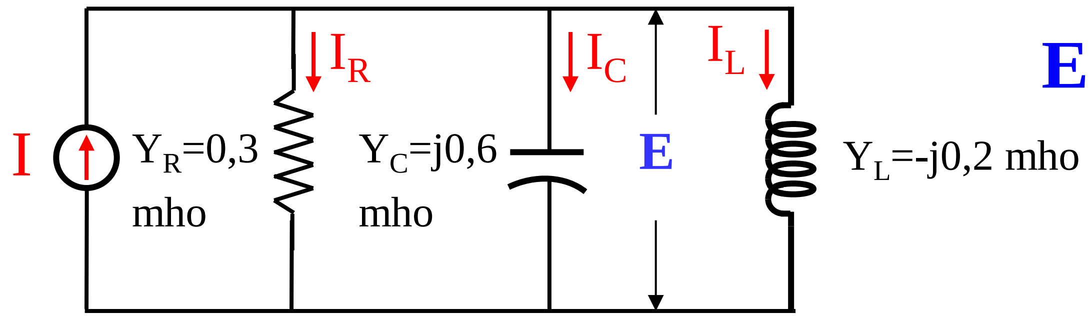
$$\mathbf{V_C} = V\angle -90^o$$

$$\mathbf{V_C} = \frac{1}{j\omega}\mathbf{I} = -j\frac{1}{\omega}\mathbf{I}$$

Örnek 5.3: Aşağıdaki devrede $E = 10\angle 0^{o}$ V'luk bir gerilim oluşması için gerekli kaynak akımının değerini evreli vektör gösterimi kullanarak bulunuz.



Çözüm 5.3:



$$\mathbf{E} = \mathbf{10}\angle 0^o$$

Direnç: $\mathbf{I_R} = 0,3\mathbf{E} = 3\angle 0^o$

Sığa: $\mathbf{I_C} = j0,6\mathbf{E} = j6 = 6\angle 90^o$

Bobin: $\mathbf{I_L} = -j0,2\mathbf{E} = -j2 = 2\angle -90^o$

$$j6 = 6\angle - \tan(6/0)^o = 6\angle 90^o$$

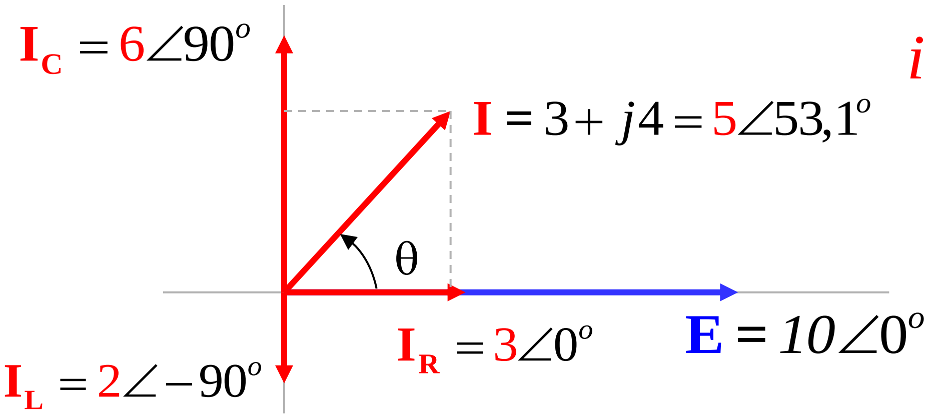
$$-\tan^{-1}(6/0)^o = -\tan^{-1}(\infty)^o = 90^o$$

$$-\tan^{-1}(-2/0)^o = -\tan^{-1}(\infty)^o = -90^o$$

Kirchhoff Akım Yasası (KAY): $\mathbf{I} = \mathbf{I_R} + \mathbf{I_C} + \mathbf{I_L}$

$$\mathbf{I} = 3 + j6 + (-j2) = 3 + j4 = 5\angle 53,1^o$$

$$i(t) = 5\sqrt{2}\cos(\omega t + 53,1^o)$$



Uygulanan akım ve gerilim arasında θ=53,1° lik fark var!