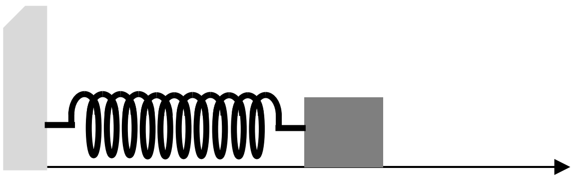
Ankara Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi, Fizik Mühendisliği Bölümü

FZM210 Dalgalar ve Optik

Prof. Dr. Hüseyin Sarı

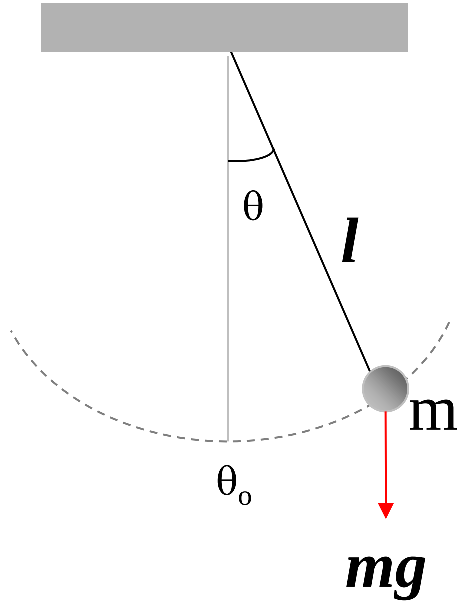
Ankara Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Fizik Mühendisliği Bölümü

Salınım Hareketi
(2/2)



Basit Sarkaç

Düşey düzlemde, uzunluğu ***l*** olan kütlesiz bir ipin ucuna bağlı bir **m** kütlesini düşünelim. (m kütlesi noktasal ve ipin kütlesi ihmal edildiğinde bu sistem ***basit sarkaç*** adını alır)

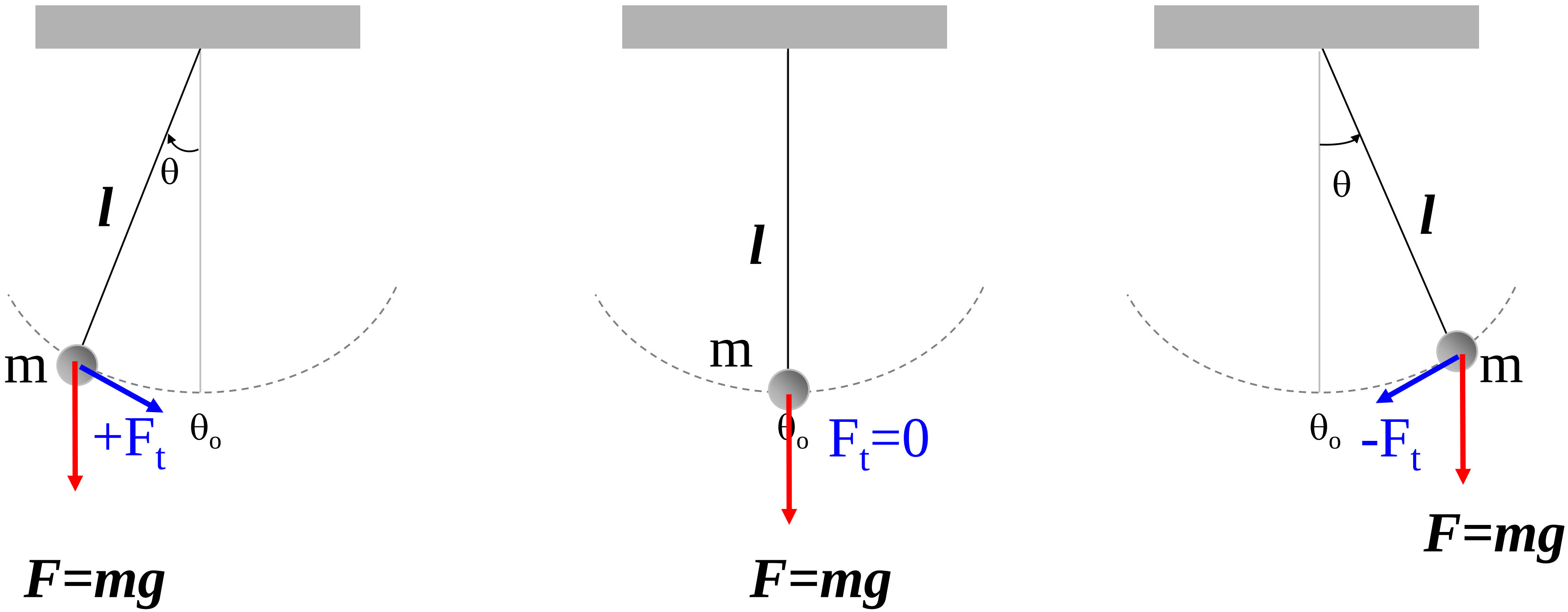


Varsayımlar:

- Sürtünme yok ($\boldsymbol{F}_{sürtünme}=0$)
- Sarkaç ipinin (l) kütlesi ihmal edilecek
- Denge noktası (θ_o) etrafındaki yerdeğiştirmenin ($\Delta\theta=\theta_o-\theta$) küçük olduğu varsayılacak.

Basit Sarkaç

m kütlesi, yerçekimi kuvvetinin (**mg**) teğetsel bileşeni (F_t) tarafından denge noktasına getirilmeye çalışılır; yerçekimi kuvvetinin çapsal bileşeni (F_r) ipteki gerilim kuvveti (T) ile dengelendiğinden bu yönde bir hareket olmaz.



$\Delta\theta \neq 0 \rightarrow F_t \neq 0$ $\Delta\theta = 0 \rightarrow F_t = 0$ $\Delta\theta \neq 0 \rightarrow F_t \neq 0$

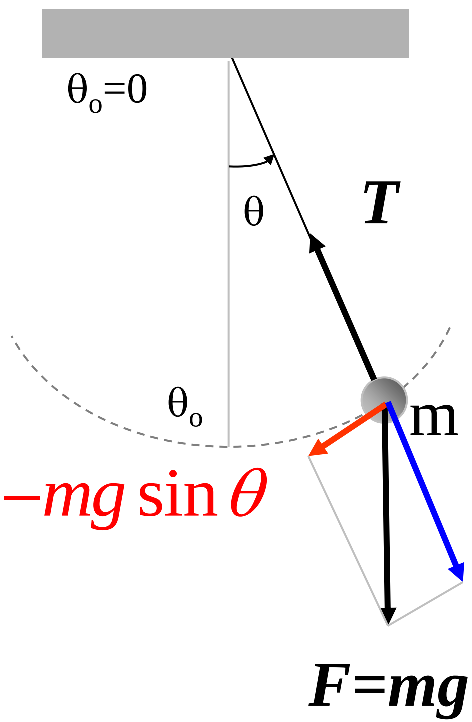
$$F = -k(\theta_0 - \theta) = -k\Delta\theta$$

Basit Sarkaç

m kütlesi, yerçekimi kuvvetinin (**mg**) teğetsel bileşeni (F_t) tarafından denge noktasına getirilmeye çalışılır; yerçekimi kuvvetinin çapsal bileşeni (F_r) ipteki gerilim kuvveti (T) ile dengelendiğinden bu yönde bir hareket olmaz.

$$\Delta\theta = \theta_o - \theta = \theta$$

$$\theta_o = 0$$



$$F_t = -mg\sin\theta$$

$$F_r = mg\cos\theta$$

$$\sum F_r = 0$$

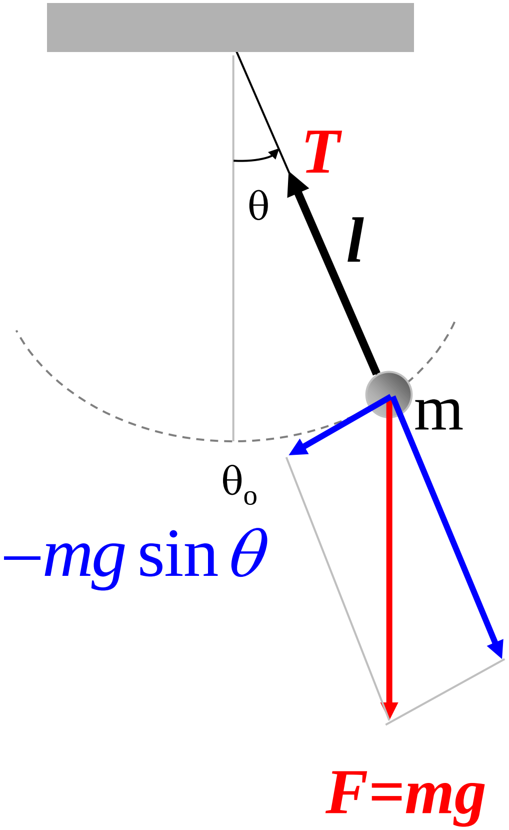
$$\sum F_\theta \neq 0$$

$$F_r = -mg\cos\theta + T = 0$$

$$F_\theta = -mg\sin\theta \neq 0$$

Basit Sarkaç

Sarkaçın hareket denklemini bulabilirsek θ(t), cisme ait bütün bilgileri edinmiş oluruz.



$$F_t = -mg\sin\theta$$

$$F_r = mg\cos\theta$$

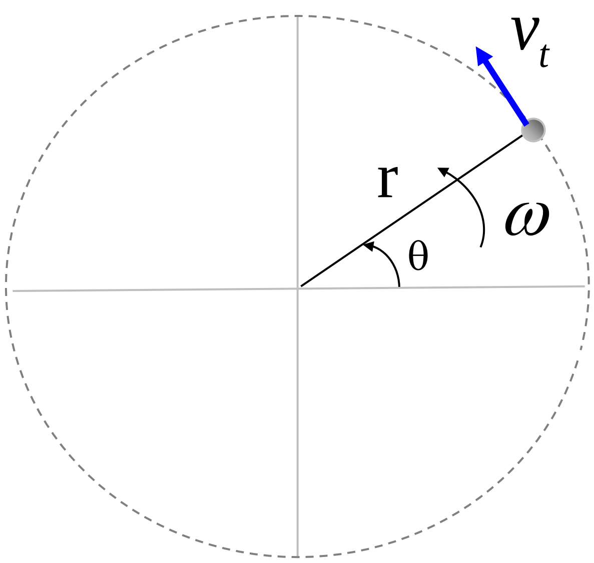
$$F_r = mg\cos\theta = T \qquad \sum F_r = mg\cos\theta - T = 0$$

m kütlesine etki eden kuvvet (Geri Çağırıcı Kuvvet):

$$\sum F_t = -mg\sin\theta \neq 0$$

Açısal Nicelikler

Dairesel hareket:



Açısal yerdeğiştirme (rad): $\theta(t)$

Açısal hız (ω) (rad/s): $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

Eğer açısal hız sabit ise, bu daha önce tanımlamış olduğumuz açısal frekansa (ω_o) eşittir. Eğer açısal hız sabit değilse ω olarak gösterilir.

Açısal ivme (α) (rad/s^2): $\alpha = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

$$F_t = m\alpha$$

Tegetsel (v_t) ve açısal hızlar (ω) arasındaki ilişki.

$$v_t = r\omega = r\frac{d\theta}{dt}$$

Tegetsel (a_t) ve açısal ivme (α) arasındaki ilişki.

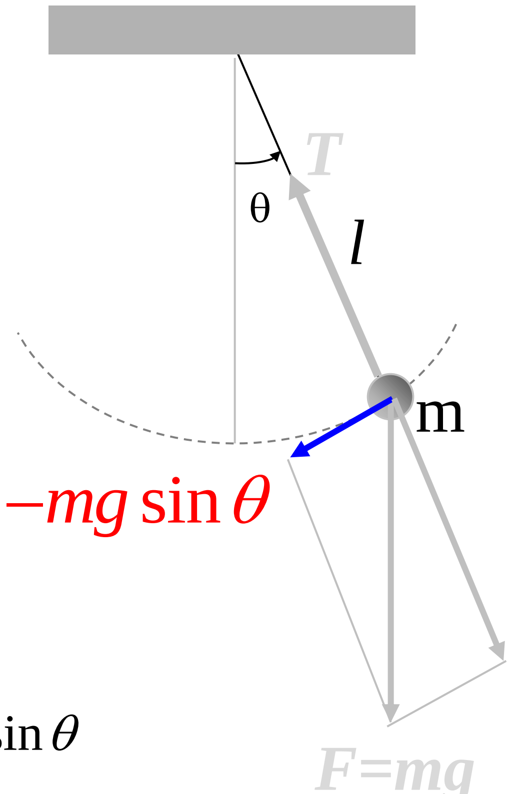
$$a_r = r\alpha = r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Basit Sarkaç

Sarkaçın hareket denklemini bulabilirsek θ(t), cisme ait bütün bilgileri edinmiş oluruz.

Tegetsel (a_θ) ve açısal ivme (α) arasındaki ilişki.

$$a_\theta = l\alpha = l\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$



$$F_t = -mg\sin\theta$$

$$F_r = mg\cos\theta$$

$$F_t = ma_\theta \Rightarrow m\left(l\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = -mg\sin\theta$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

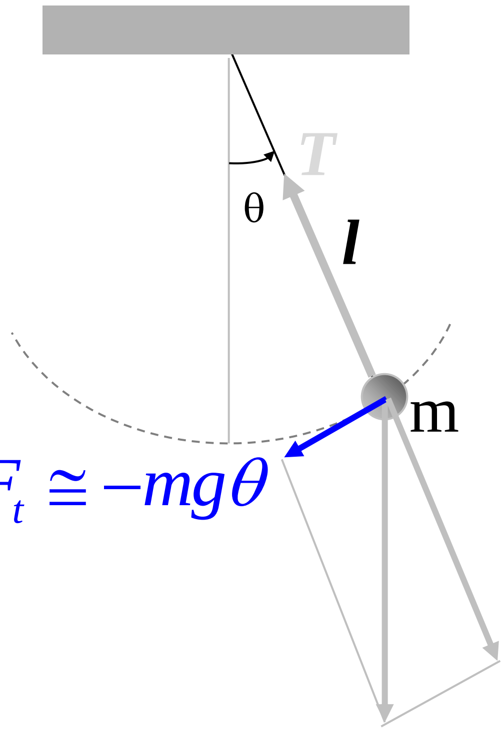
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g}{l}\right)\sin\theta = 0$$

Bu, basit harmonik hareket denklemini ile aynı formda **değildir!**

Basit Sarkaç

Basit Harmonik hareket ile aynı forma getirebilir miyiz? Küçük açı yaklaşımına bakarsak:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g}{l}\right)\sin\theta = 0$$



$$F_r = mg\cos\theta$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots$$

$$\sin\theta \cong \theta$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g}{l}\right)\theta = 0}$$

$$F_t \cong -mg\theta$$

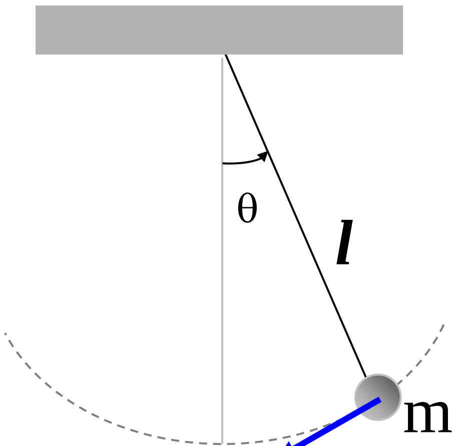
BHH denklemi:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0$$

$$F_t = -mg\sin\theta \cong -mg\theta = -(mg)\theta = -k\theta$$

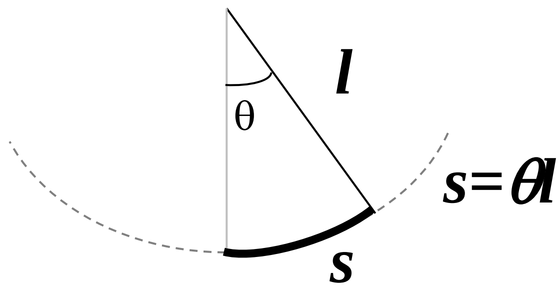
m kütlesine etki eden kuvvet
(Geri Çağırıcı Kuvvet):

Basit Sarkaç-Hareket Denklemi



$$F_t \cong -mg\theta$$

$$F_t \cong -mg\theta = -mg\left(\frac{s}{l}\right) = -k's$$



$$F = ma = -k's$$

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \left(\frac{g}{l}\right)\theta(t) = 0$$

$$ma = m\frac{d^2 s}{dt^2} = -k's$$

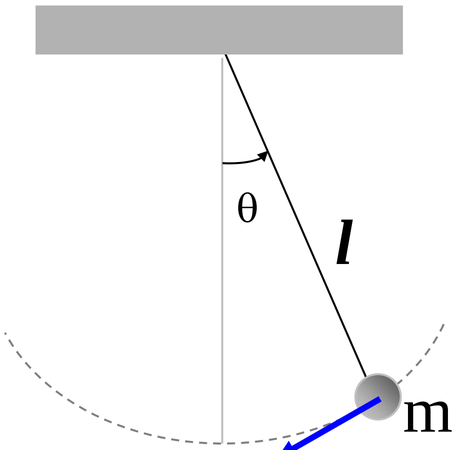
$$\omega_o \equiv \left(\frac{g}{l}\right)^{1/2}$$

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \left(\frac{g}{l}\right)s(t) = 0$$

Bu, ikinci dereceden (*2 kez türev içeren*), doğrusal (*türevli terimin karesi yok*), homojen (*eşitliğin sağ tarafı sıfır*) **diferansiyel denklem-**dir.

Kütle-yay sisteminde açısal frkans $\omega_o=(k/m)^{1/2}$ olduğunu hatırlayalım

Basit Sarkaç-Hareket Denklemi



$$F_t \cong -mg\theta$$

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \left(\frac{g}{l}\right)\theta(t) = 0$$

$$\omega_o \equiv \left(\frac{g}{l}\right)^{1/2}$$

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \omega_o^2\theta(t) = 0$$

Bu, **diferansiyel denklem**in çözümünü BHH'den biliyoruz…

$$\theta(t) = A\cos(\omega_o t + \phi)$$

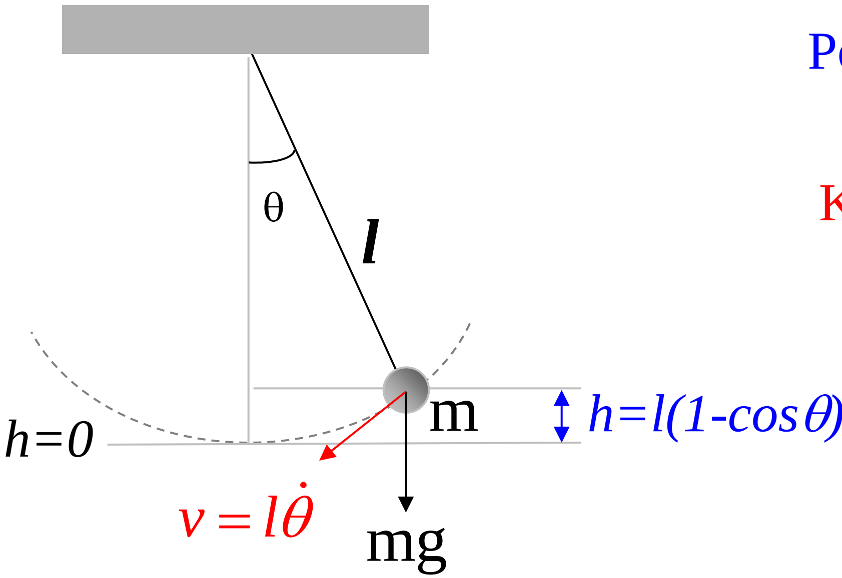
A= Genlik (maksimum açısal yerdeğiştirme) (rad)

ω_o= Açısal frekans (rad/s)

ϕ= Faz sabiti (rad)

Basit Sarkaç-Enerji

BHH yapan sarkaçta kayıp olmadığı için mekanik enerji (E) hareket sabitidir.



Potansiyel Enerji: $U = mgh = mgl(1-\cos\theta)$

Kinetik Enerji: $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2$

$$\theta(t) = A\cos(\omega_o t + \phi)$$

$$v = l\dot{\theta}(t) = l\frac{d\theta(t)}{dt} = -\omega_o Al\sin(\omega_o t + \phi)$$

$$K = \frac{1}{2}m\left(-\omega_o Al\sin(\omega_o t + \phi)\right)^2$$

$$E = U + K = mgl(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2$$

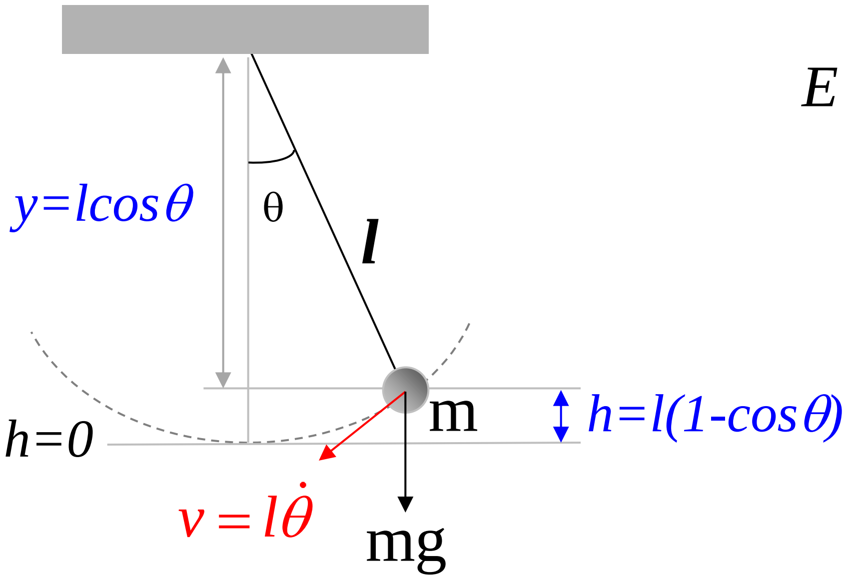
$$E = U + K = mgl(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}ml^2\left(\omega_o A\right)^2\sin^2(\omega_o t + \phi)$$

$$\omega_o \equiv \left(\frac{g}{l}\right)^{1/2}$$

Hareket Denkleminin Enerji Yöntemi ile Elde Edilişi

BHH yapan sarkaçta kayıp olmadığı için mekanik enerji (E) hareket sabitidir.

$$\frac{dE}{dt} = 0$$



$$E = U + K = mgl(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2 = Sabit$$

$$\frac{dE}{dt} = mgl\sin\theta\dot{\theta} + \frac{1}{2}2ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$$

$$\dot{\theta}\left(\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta\right) = 0$$

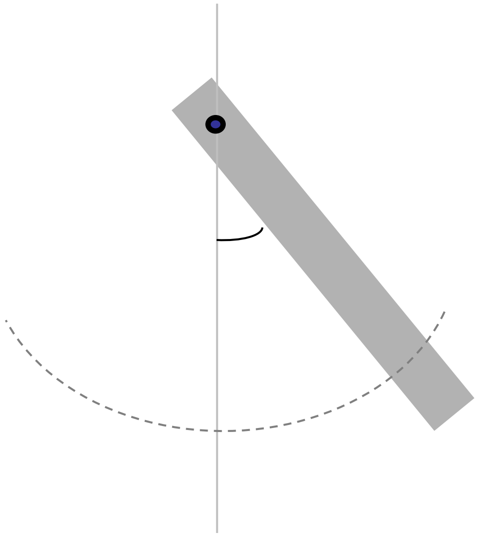
$$\dot{\theta} = 0 \;\; veya \;\; \left(\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta\right) = 0$$

$\dot{\theta} = 0$ Çözümü sarkaçın hareketsiz durumuna karşı gelir. Diğer çözüm ise:

Daha önce elde edilen hareket denklemine karşı gelmektedir :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Fiziksel Sarkaç (Physical Pendulum)

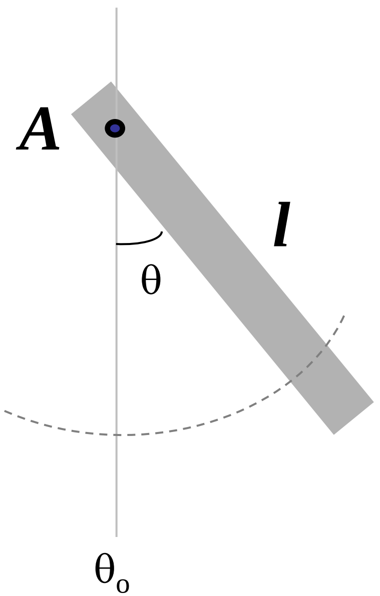


Fiziksel sarkaç, normal sarkaçtan farklı olup durağan bir nokta çevresinde kendi ağırlığının etkisiyle salınım yapan devingen katı cisimdir.

Fiziksel Sarkaç

Düşey düzlemde, sabit bir nokta (A) etrafında hareket edebilen, uzunluğu ***l*** , kütlesi m ve eylemsizlik momenti I olan katı bir cismi düşünelim

Eylemsizlik momenti (I): $I = \frac{1}{3} m l^2$

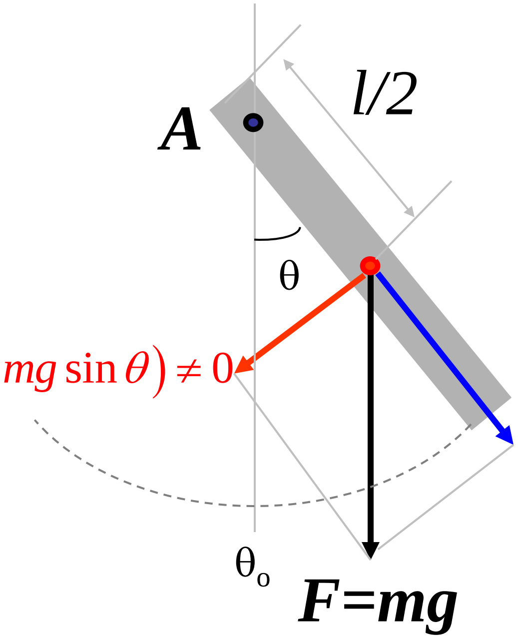


Varsayımlar:

- Sürtünme yok ($\boldsymbol{F}_{sürtünme}=0$)
- Denge noktası (θ_o) etrafındaki yerdeğiştirmenin ($\Delta\theta=\theta_o-\theta$) küçük olduğu varsayılacak.

Fiziksel Sarkaç

Sarkaçın hareket denklemini bulabilirsek θ(t), cisme ait bütün bilgileri edinmiş oluruz.



$$\Gamma_t = -\left(\frac{l}{2}\right)(mg\sin\theta) \neq 0$$

$$\Gamma_r = \left(\frac{l}{2}\right)(mg\cos\theta) = 0$$

Eylemsizlik momenti:

$$I = \frac{1}{3}ml^2$$

Cismi A noktası etrafında döndüren kuvvet (tork):

$$\vec{\Gamma} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\left|\vec{\Gamma}\right| = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = r.F\sin\alpha$$

$$\left|\vec{\Gamma}_r\right| = r.F\sin(180^o) = 0$$

$$\left|\vec{\Gamma}_t\right| = r.F\sin(90^o) \neq 0$$

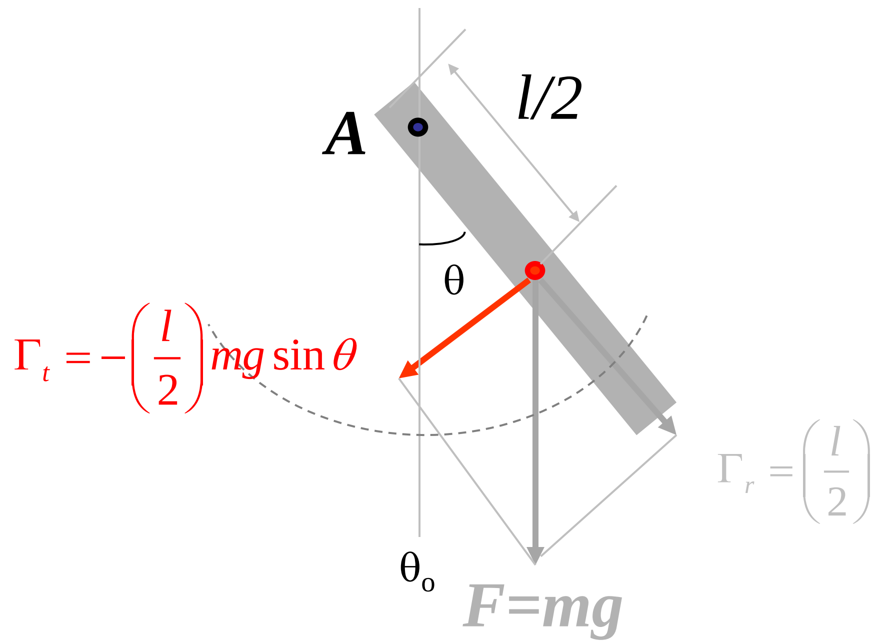
Etki eden tork

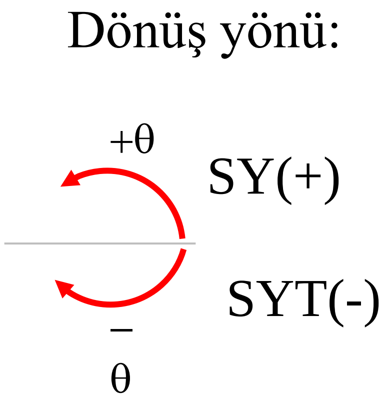
(Geri Çağırıcı Kuvvet):

$$\Gamma = -\left(\frac{l}{2}\right).mg\sin\theta$$

Fiziksel Sarkaç

Sarkaçın hareket denklemini bulabilirsek θ(t), cisme ait bütün bilgileri edinmiş oluruz.





$$\Gamma_t = I\alpha \qquad \Gamma_t = -\left(\frac{l}{2}\right).mg\sin\theta$$

$$\Gamma_t = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{l}{2}mg\sin\theta \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgl}{2I}\sin\theta$$

$$I = \frac{1}{3}ml^2 \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g}{2l}\sin\theta$$

Fiziksel Sarkaç

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g}{2l}\sin\theta \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3g}{2l}\sin\theta = 0$$

Küçük açı yaklaşımı:

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots$$

$$\sin\theta \cong \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3g}{2l}\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \left(\frac{3g}{2l}\right)\theta(t) = 0$$

BHH denklemi:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0$$

Fiziksel Sarkaçin hareket denklemi:

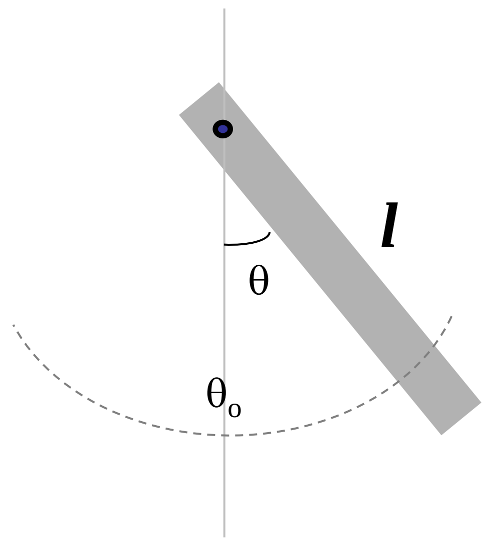
$$\boxed{\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \omega_o^2\theta(t) = 0}$$

$$\omega_o \equiv \left(\frac{3g}{2l}\right)^{1/2}$$

Fiziksel Sarkaç-Hareket Denklemi

$$\boxed{\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \omega_o^2\theta(t) = 0}$$

$$\omega_o \equiv \left(\frac{3g}{2l}\right)^{1/2}$$



$$I = \frac{1}{3}ml^2$$

$$\theta(t) = A\cos(\omega_o t + \phi) \qquad \omega_o \equiv \left(\frac{3g}{2l}\right)^{1/2}$$

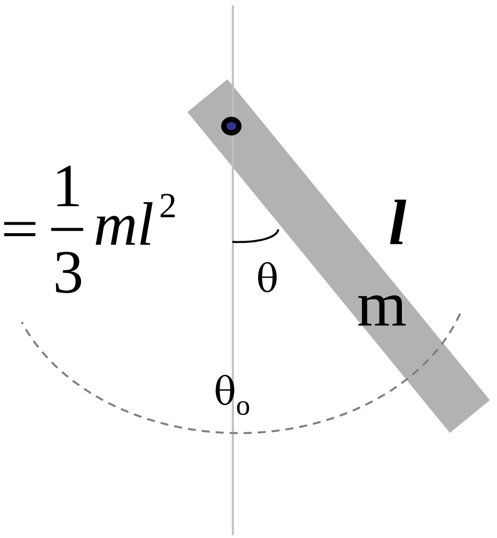
A= Genlik (maksimum açısal yerdeğiştirme) (rad)

ω_o= Açısal frekans (rad/s)

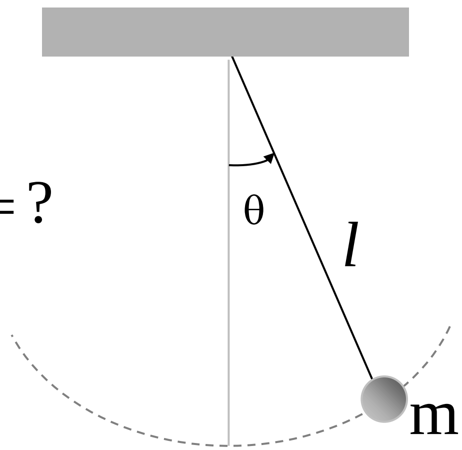
ϕ= Faz sabiti (faz kayması) (rad)

Ödev: Fiziksel sarkaçın eylemsizlik momenti yerine noktasal kütlenin eylemsizlik momentini yazdığımızda basit sarkaç denklemini elde edilebileceğini gösteriniz.

$$I = \frac{1}{3} m l^2$$



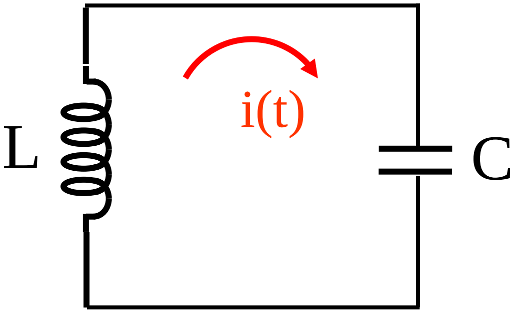
$$I = ?$$



$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \left(\frac{3g}{2l}\right)\theta(t) = 0$$

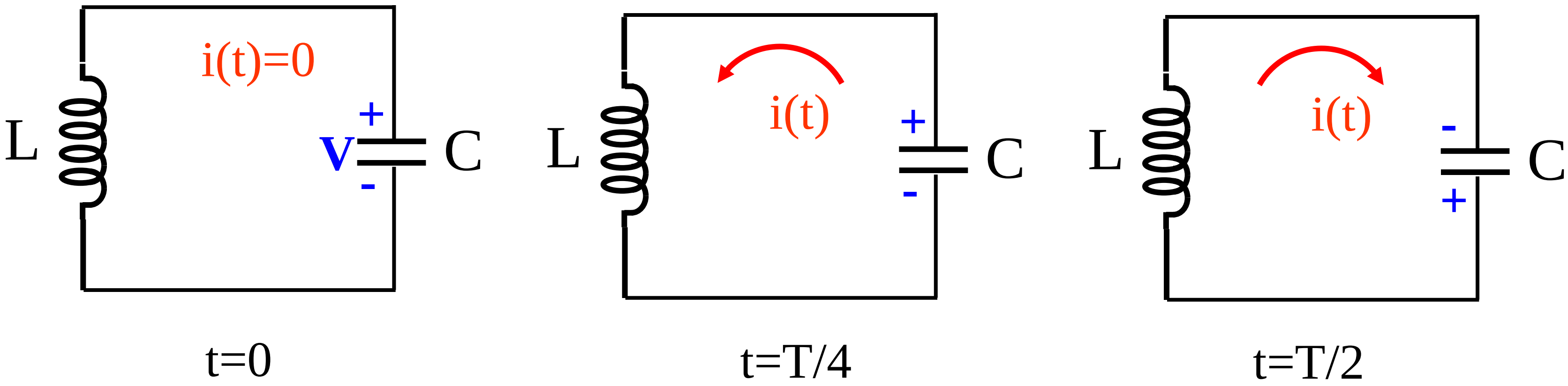
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g}{l}\right)\sin\theta = 0$$

LC- Devresi



LC- Devresi-1

Bobin (L) ve sığadan (C) oluşan bir elektrik devresinde devrede dolanan yük (ve akım) devrede direnç gibi bir kayıp elemanı olmadığında osilasyon hareketi yapar. Sığa üzerinde başlangıça bulunan yük bobin üzerinden akıma, bobin üzerinden geçen akım ise sığa üzerinde ters kutuplarda yük birikmesine neden olur.



Enerji tüketimi yok (devrede direnç yok!)

Devre için Kirchoff Gerilim Yasası:

$$L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int i(t)dt=0$$

Integralden kurtarmak için türev alınırsa:

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2}+\frac{1}{LC}i(t)=0$$

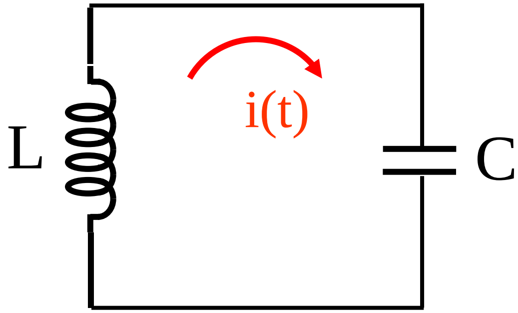
LC- Devresi-2

Bobin (L) ve sığadan (C) oluşan bir elektrik devresinde devrede dolanan yük (ve akım) devrede direnç gibi bir kayıp elemanı olmadığında osilasyon hareketi yapar. Sığa üzerinde başlangıça bulunan yük bobin üzerinden akıma, bobin üzerinden geçen akım ise sığa üzerinde ters kutuplarda yük birikmesine neden olur.

LC Devresi

Bobin:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$



Sığa:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

Enerji tüketimi yok (devrede direnç yok!)

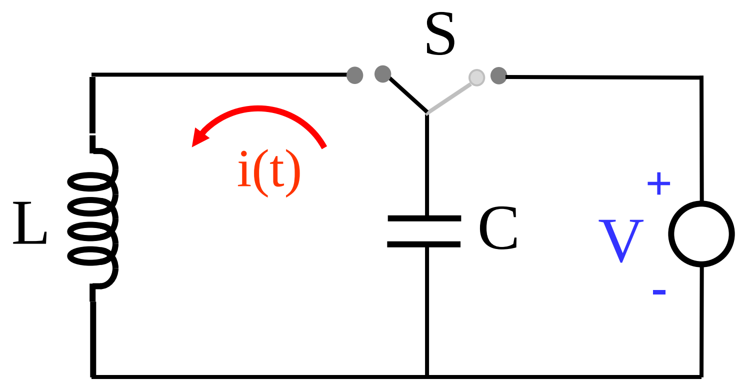
Devre için Kirchoff Gerilim Yasas::

$$L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt = 0$$

İntegralden kurtarmak için türev alınırsa:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC}i(t) = 0$$

LC- Devresi-3



Enerji tüketimi yok (devrede direnç yok!)

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} i(t) = 0 \qquad \omega_o \equiv \left(\frac{1}{LC} \right)^{1/2}$$

Çözüm:

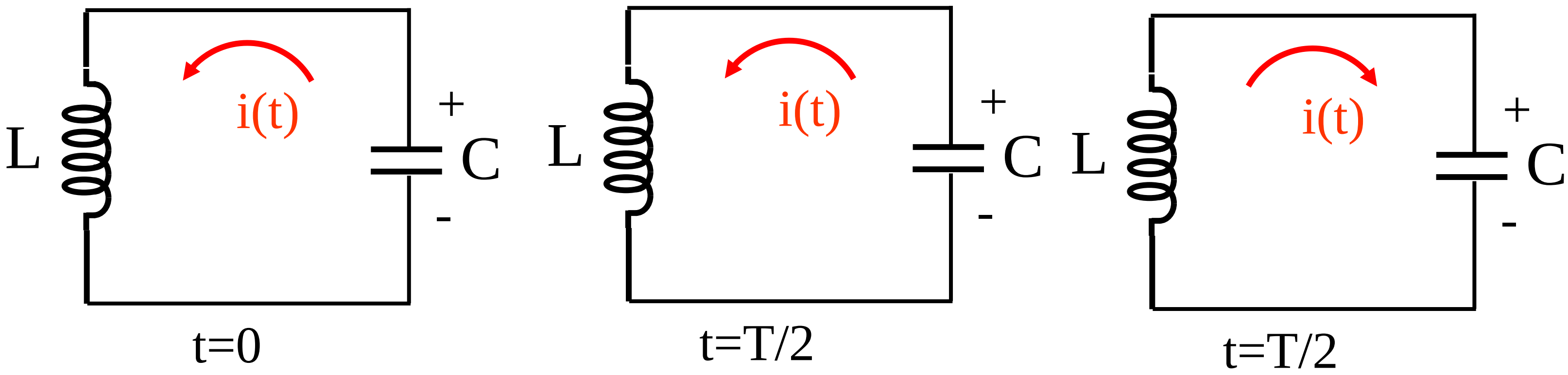
$$i(t) = I \cos(\omega_o t + \phi)$$

I = Genlik (Devrede dolanan maksimum akım) (Amper)

ω_o= Açısal frekans (rad/s)

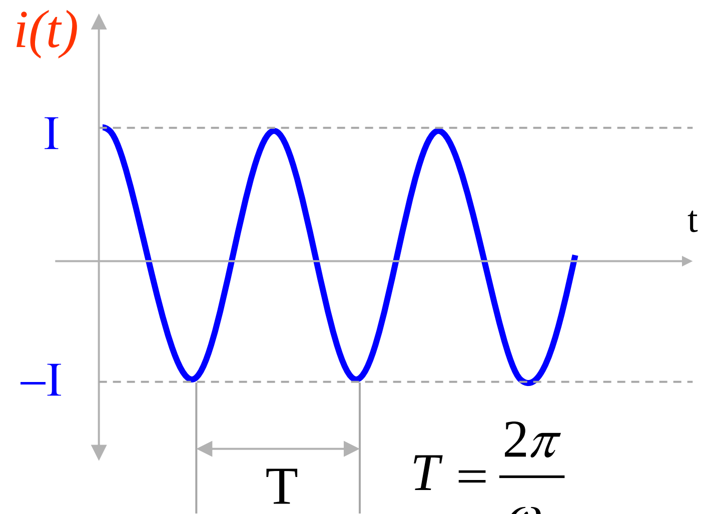
ϕ= Faz sabiti (rad)

LC- Devresi



$$i(t) = I\cos(\omega_o t + \phi)$$

$$\omega_o \equiv \left(\frac{1}{LC}\right)^{1/2}$$



$$T = \frac{2\pi}{\omega_o}$$

$$\omega_o = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

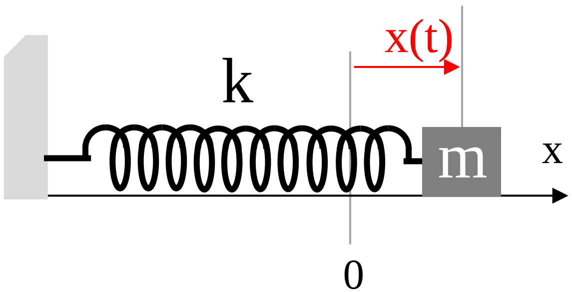
$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{LC}$$

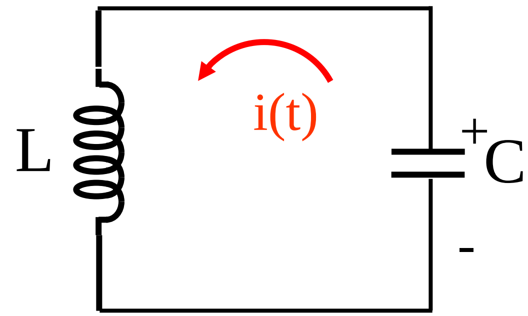
I= Genlik (Akımın maksimum değeri) (Amper)

ω_o= Açısal frekans (rad/s)

ϕ= Faz açısı (faz kayması) (rad)

Kütle-Yay ve LC Devresi





Mekanik <-> Elektrik

$$x \Leftrightarrow i$$

$$m \Leftrightarrow L$$

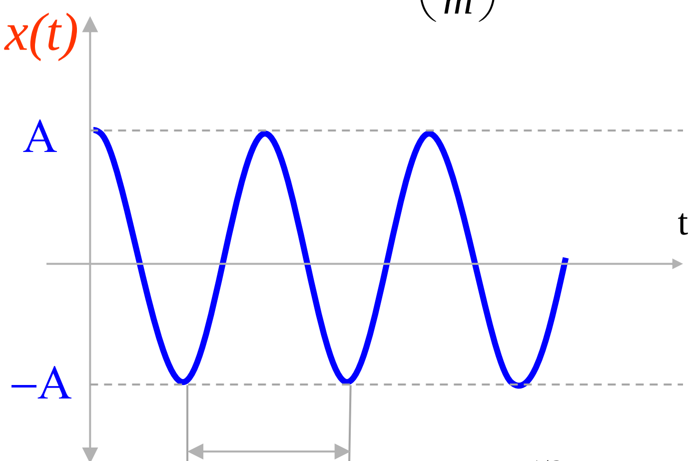
$$k \Leftrightarrow \frac{1}{C}$$

$$x(t) = A\cos(\omega_o t)$$

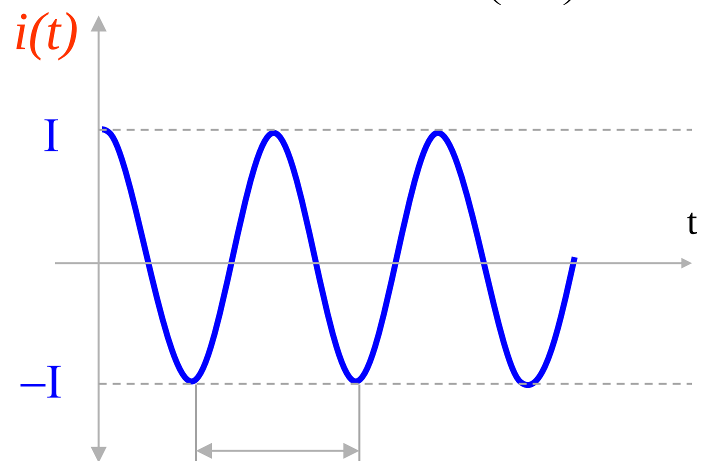
$$\omega_o \equiv \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$$

$$i(t) = I\cos(\omega_o t + \phi)$$

$$\omega_o \equiv \left(\frac{1}{LC}\right)^{1/2}$$

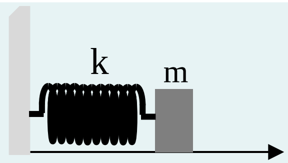
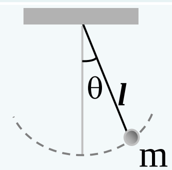
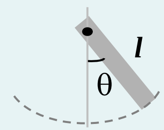
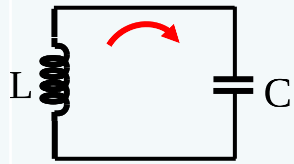
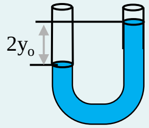


$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2}$$



$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\left(LC\right)^{1/2}$$

Basit Harmonik Hareket Yapan çeşitli Düzenekler

Salınım Yapan Sistemin Adı	Salınım Yapan Sistem	Kuvvet	Hareket Denklemi	Açısal Frekans	Enerji
Kütle-Yay		F=-kx	$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\left(\frac{k}{m}\right)x(t)=0$	$\omega_o \equiv \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$	$E=\frac{1}{2}kA^2$
Basit Sarkaç		F=-mg	$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+\left(\frac{g}{l}\right)\theta(t)=0$	$\omega_o \equiv \left(\frac{g}{l}\right)^{1/2}$	
Fiziksel Sarkaç		F=-mg	$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+\left(\frac{3g}{2l}\right)\theta(t)=0$	$\omega_o \equiv \left(\frac{3g}{2l}\right)^{1/2}$	
LC Devresi		F=qE	$\frac{d^2i(t)}{dt^2}+\left(\frac{1}{LC}\right)i(t)=0$	$\omega_o \equiv \left(\frac{1}{LC}\right)^{1/2}$	
Su Hunisi		F=-mg	$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\left(\frac{g}{y_o}\right)y(t)=0$	$\omega_o \equiv \left(\frac{g}{y_o}\right)^{1/2}$	