Matematik I

Doç. Dr. Türkmen Göksel

AÜ SBF İktisat Bölümü

Matematik I

Doğrusal Denklem Sistemi

n değişkenli ve m denklemden oluşan "Doğrusal Denklem Sistemi":

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$$

x_j : değişkenler, $j = 1, ..., n$;
a_{ij} : katsayılar, $i = 1, ..., m; j = 1, ..., n$;
b_i : sabitler, $i = 1, ..., m$.

Doğrusal Denklem Sistemi

Doğrusal Denklem Sisteminin Matrislerle İfade Edilmesi:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn},$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{nx1}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{mx1}$$

Doğrusal Denklem Sistemi

Burada

- A_{mxn} matrisi katsayıları,
- x vektörü değişkenleri,
- b vektörü ise sabitleri göstermektedir.
- Bu sistem kısaca $Ax = b$ şeklinde gösterilir.
- Eğer $m = n$ ise bu matrise kare matris denir.
- A matrisi kısaca $(a_{ij})_{mxn}$ şeklinde de ifade edilebilir.

Ekonomik Uygulama I: Girdi-Çıktı Modelleri

Girdi-Çıktı Modeli ilgili varsayımlar:

- Ekonomide 3 sektör olduğunu varsayalım: 1,2 ve 3.
- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$
- A matrisinde a_{ij} elemanı j sektöründeki 1 birim üretimi yapmak için gerekli olan i sektörü girdisidir.
- Örneğin $a_{12} = 0.2$ ifadesi 2. sektörde 1 birim üretmek için 0.2 birim 1. sektör girdisi gerektiğini ifade etmektedir.

Ekonomik Uygulama I: Girdi-Çıktı Modelleri

- Dolayısıyla 1. sütunun toplamı yani $a_{11} + a_{21} + a_{31}$ ifadesi 1. sektörde 1 birim üretim yapmak için gerekli olan toplam girdi miktarını yansıtır.
- Her üç sektördeki malın fiyatını da 1 olarak varsayalım.
- $$\underbrace{\sum_{i=1}^{3} a_{ij}}_{\text{1 birim j çıktısı üretmenin maliyeti}} \leq \underbrace{1}_{\text{1 birim j çıktısının değeri}} \quad \forall j.$$
- Bir başka deyişle her üç sektörde de girdilerin maliyeti çıktı değerini aşamaz.
- $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, b_i her i sektörüne olan talebi yansıtır (girdi ihtiyacı dışındaki talep).

Ekonomik Uygulama I: Girdi-Çıktı Modelleri

$$\underbrace{x_1}_{\text{1.sektör çıktısı}} = \underbrace{a_{11}x_1}_{\text{1.den 1.sektöre aktarılan girdi}} + \underbrace{a_{12}x_2}_{\text{1.den 2.sektöre aktarılan girdi}}$$

$$+ \underbrace{a_{13}x_3}_{\text{1.den 3.sektöre aktarılan girdi}} + \underbrace{b_1}_{\text{1. sektör için girdi ihtiyacı dışındaki talep}}$$

- Örneğin a_{12} ifadesi 1 birim 2. sektör çıktısı üretmek için kullanılacak 1. sektör girdisini gösterir.
- Dolayısıyla $a_{12}x_2$ ifadesi x_2 birim 2. sektör üretimi yapmak için gerekli toplam 1. sektör girdisidir.
- Sonuç olarak, 1. sektör toplam çıktısının yani x_1'in; 1., 2., 3. sektörlerdeki girdi talebi ile girdi dışı talebi toplamına eşit olması gerekir.

Ekonomik Uygulama I: Girdi-Çıktı Modelleri

Yukarıdaki denklem her üç sektör için de doğru olduğundan şunu yazabiliriz:

$$x_i = \left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \right) + b_i, \ \forall \ \ i = 1, 2, 3.$$

ya da vektör ve matrislerle ifade edersek

$$x_{(3x1)} = A_{(3x3)} x_{(3x1)} + b_{(3x1)}$$

olur.

- Burada x vektörü (3x3) boyutundaki birim matrisi ile çarpılırsa yine kendisine eşit olacağından yukarıdaki ifadeyi $Ix = Ax + b$ şeklinde de yazabiliriz.

Ekonomik Uygulama I: Girdi-Çıktı Modelleri

Etkin üretim düzeyinin çözümü (Arz=talep eşitliğini sağlayan üretim düzeyleri):

- $Ix = Ax + b$ denkleminden şu çıkarımları kolaylıkla yapabiliriz:
- $Ix - Ax = b \Longrightarrow (I - A)x = b \Longrightarrow x = (I - A)^{-1}b.$
- Burada x etkin üretim düzeyini veren çıktı miktarlarını gösterir, yani piyasada fazla ya da eksik üretim olmaması durumunu sağlar.

Ekonomik Uygulama II: Markov Zincirleri

Markov Zincirleri:

- $n \geq 2$ tane durum olsun (durumlar: $1, ..., i, j, ..., n$).
- Markov zinciri herhangi bir i durumundan j durumuna geçiş olasılığını yansıtır.
- M yani Markov zincirini gösteren matris aşağıdaki gibi ifade edilir. M'ye geçiş matrisi adı da verilmektedir.

$$M = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \cdots & \pi_{1n} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \cdots & \pi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \pi_{ij} & \vdots \\ \pi_{n1} & \pi_{n2} & \cdots & \pi_{nn} \end{pmatrix}_{nxn}$$

- $0 \leq \pi_{ij} \leq 1$, i durumundan j durumuna geçiş olasılığını yansıtır.
- Her bir satırın toplamı 1'e eşit olmalıdır: $\sum_{j=1}^{n} \pi_{ij} = 1 \ \ \forall i$

Ekonomik Uygulama II: Markov Zincirleri

Örnekteki hesaplamalar M matrisindeki olasılıkların her dönem için aynı kalacağı varsayımı altında yapılmaktadır.

- **Örnek:**
- $t = 0$ anında 1. ve 2. ildeki nüfus sayıları aynı olup 1000'e eşit olsun.
- 1. ilden 2. ile göç olasılığı 0.4 ve 2. ilden 1. ile göç olasılığı 0.2 ise $t = 1$ ve $t = 2$ dönemlerinde bu iki ilde nüfus kaç olur?
-
$$M = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}_{2x2}$$
- Nüfus için başlangıç matrisi:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}_{2x1}$$

Ekonomik Uygulama II: Markov Zincirleri

Örneğin devamı:

- 1. dönem için çözüm: $x_0' M = x_1'$ olarak hesaplanır.
- Genel çözüm $x_t' M = x_{t+1}'$ $\forall t$ olarak hesaplanır.
- $$[1000 \quad 1000] \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = [800 \quad 1200]$$
- $$[1000 \quad 1000] \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}^2 = [720 \quad 1280]$$
- Benzer şekilde t dönem sonrası hesaplanmak isteniyorsa M matrisinin t. dereceden üssü alınır.

Markov Zincirinin Durağan Olması

Markov Zincirinde Durağanlık:

- $\lim_{t \longrightarrow \infty} M^t = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ gibi bir matrise yakınsar.
- Örneğimizde $t = 12$'den sonra M matrisi

$$M^* = \begin{pmatrix} 0.3333 & 0.6667 \\ 0.3333 & 0.6667 \end{pmatrix}$$

  matrisine yakınsar.
- Benzer şeklilde nüfus vektörü de $x^* = [666.7 \quad 1333.3]$ vektörüne yakınsar.
- * ifadesi durağan değeri göstermektedir.