Matematik I

Doç. Dr. Türkmen Göksel

AÜ SBF İktisat Bölümü

Kısıtsız Optimizasyon

Tek Değişkenli Fonksiyonların Optimizasyonu:

- $f'(x) > 0 \ \forall \ x \implies$ Kesin artan.
- $f'(x) < 0 \ \forall \ x \implies$ Kesin azalan.
- İkinci türev fonksiyonun kavisini (curvature) belirler.
- $f''(x) > 0 \ \forall \ x \implies$ Kesin Konveks.
- $f''(x) < 0 \ \forall \ x \implies$ Kesin Konkav.

Kısıtsız Optimizasyon: Tek Değişken Durumu

Örnek:

- Fayda fonksiyonu $U(c) = \log(c)$ şeklinde verilmiş olsun $(c > 0)$.
- Bu durumda U fayda fonksiyonu c'de (tüketimde) azalan oranda (kesin) artan bir fonksiyondur.
- İktisat literatüründe genel olarak fonksiyon *log* olarak yazılsa da işlem yapılırken (örneğin türev alınırken) fonksiyon *ln* gibi işlem görür.
- U fonksiyonu c'de kesin artan: $U'(c) = \frac{1}{c} > 0$. Ya da bir başka deyişle "Marjinal Fayda" hep pozitiftir.
- Artışın azalan oranda olması (azalan marjinal fayda ilkesi) (Kesin konkav): $U''(c) = -\frac{1}{c^2} < 0$. Bir başka deyişle "Marjinal Fayda" (pozitif de olsa) sürekli azalmaktadır.

Kısıtsız Optimizasyon: Tek Değişken Durumu

Teorem: f fonksiyonu I gibi bir aralıkta tanımlı olsun. $f'(x_0) = 0$ olsun. ($x_0 \in I$).

- $f''(x_0) < 0$ ise x_0 f fonksiyonunun maximum noktasıdır.
- $f''(x_0) > 0$ ise x_0 f fonksiyonunun minimum noktasıdır.
- $f''(x_0) = 0$ ise x_0 f fonksiyonunun max, min veya hiçbirisi olabilir.
- Bu durumda $f^N(x_0) \neq 0$ olan N. türev işaretine bakılır.
  1. N çift sayı ise $f^N(x_0) < 0 \Longrightarrow$ maximum.
  2. N çift sayı ise $f^N(x_0) > 0 \Longrightarrow$ minimum.
  3. N tek sayı ise x_0 dönüşüm noktasıdır.

Kısıtsız Optimizasyon: Çok Değişkenli Durumu

Çok değişkenli fonksiyonların optimizasyonu için gerekli koşullar:

- $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ olsun.
- Bu durumda Hessian matrisi şu şekilde olur (f_{ij} f'nin i. ve j. değişkenlere göre kısmi türevi):
- $H = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}_{nxn}$
- $H_1 = [f_{11}]$, $H_2 = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}, \ldots$
-

	1.mertebe koşulu	2.mertebe koşulu
maksimum	$f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0$	$(-1)^i \lvert H_i \rvert > 0 \ \forall \ i = 1, \ldots, n$ (H matrisi negatif belirli)
minimum	$f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0$	$\lvert H_i \rvert > 0 \ \forall \ i = 1, \ldots, n$ (H matrisi pozitif belirli)

Kısıtsız Optimizasyon: Çok Değişkenli Durumu

Örnek:

- $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1x_3 + x_3^2 + 2$
- 1.Mertebe koşulları:

$$f_1 = 4x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$f_2 = x_1 + 8x_2 = 0$$

$$f_3 = x_1 + 2x_3 = 0$$

- Bu denklem sisteminin tek çözüm $x^* = (0, 0, 0)$'dır.
- Peki $f(x^*(0, 0, 0)) = 2$ maksimum mu, minimum mu?
- $H = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}_{3x3}$
- $H = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3x3} \Longrightarrow |H_1| = 4 > 0, |H_2| = 31 > 0, |H_3| = 54 > 0 \Longrightarrow$ H pozitif belirli
- $\Longrightarrow f(x^*(0, 0, 0)) = 2$ minimum.
- Bir başka deyişle f fonksiyonu kesin konvekstir.
- Not: Burada H_1,H_2 ve H_3 Hessian matrisin leading principal minor matrislerini göstermektedir.