Matematik I

Doç. Dr. Türkmen Göksel

AÜ SBF İktisat Bölümü

Diferansiyel denklemler sürekli zaman için kullanılır:

- 1. derece diferansiyel denklemin çözümü:
- $\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{=\dot{y}} + ay = b \qquad (a, b \text{ sabit})$
- $$\underbrace{y_G}_{\text{Genel Çözüm}} = \underbrace{y_c}_{\text{tamamlayıcı çözüm}} + \underbrace{y_P}_{\text{özel çözüm}}$$
- y_c homojen kısmın çözümüdür. Bu çözüm dengeden sapmaları gösterir.
- y_p homojen olmayan kısmın çözümüdür. Dengeyi gösterir.
- y_G çözümünü "belirli" hale getirmek için $y(0)$ gibi bir başlangıç değeri kullanılır.

1. derece diferansiyel denklemin çözümü:

- $\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{=\dot{y}} + ay = b \qquad (a, b \text{ sabit})$
- **1.adım:** y_c'nin bulunuşu:
- $$\frac{dy}{dt} + ay = 0 \implies \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -a$$
- Eşitliğin her iki tarafının da t üzerinden integralini alalım.
- $$\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}dt = \int -a dt$$
- $$\ln y + c_0 = -at + c_1 \implies \ln y = -at + \underbrace{c_2}_{c_1 - c_0} \implies y = e^{-at}\underbrace{e^{c_2}}_{=A_1} \implies$$
- $$y_c = A_1 e^{-at}$$

1. derece diferansiyel denklemin çözümü:

- **2.adım:** y_p'nin bulunuşu:
- Özel çözüm içinde $y = k$ ifadesini deneyelim. Bu durumda $\frac{dy}{dt} = 0$ olur.
- Bu değerleri $\frac{dy}{dt} + ay = b$ denklemine yerleştirirsek;

$$0 + ak = b \Longrightarrow k = \frac{b}{a} \quad \text{eger} \quad a \neq 0$$

- Bu durumda

$$y_p = \frac{b}{a}$$

  (eğer $a \neq 0$ ise).
- Eğer $a = 0$ ise $\frac{dy}{dt} = b$ olur. Doğrudan integral yolu ile,

$$\int \frac{dy}{dt} dt = \int b dt$$

- $$y + c_0 = bt + c_1 \Longrightarrow y = bt + \underbrace{c_1 - c_0}_{=A_2} \Longrightarrow$$

- $$y_p = bt + A_2$$

1. derece diferansiyel denklemin çözümü:

- **3.adım:** $y_G = y_c + y_p \Longrightarrow$
-
$$y_G = A_1 e^{-at} + \frac{b}{a} \quad \text{eğer} \quad a \neq 0$$
-
$$y_G = A_1 + bt + A_2 \quad \text{eğer} \quad a = 0 \ \ (A_1 + A_2 \ \text{ değerine } \ A_3 \ \text{ diyebiliriz})$$
- **4.adım:** Belirli çözümün bulunuşu: $t = 0$ zamanındaki $y(0)$ başlangıç değeri kullanılarak A_1 ve A_3 sabitlerinin değeri bulunur.
- Eğer $a \neq 0$ ise
$$y(0) = A_1 e^{(-a)0} + \frac{b}{a} \Longrightarrow A_1 = y(0) - \frac{b}{a}$$
- Eğer $a = 0$ ise
$$y(0) = (b)0 + A_3 \Longrightarrow A_3 = y(0)$$
- y değişkeninin zaman patikasını bulmuş olduk:
- Eğer $a \neq 0$ ise
$$y(t) = \left(y(0) - \frac{b}{a} \right) e^{-at} + \frac{b}{a}$$
- Eğer $a = 0$ ise
$$y(t) = y(0) + bt$$

Dengenin dinamik istikrarı:

- Dengenin istikrarı $\Longleftrightarrow$ $t \longrightarrow \infty$ iken $y_c \longrightarrow 0$ olmasıdır.
- Bu koşul $a > 0$ durumunda sağlanır.

Diferansiyel Denklemler

Değişken terime sahip diferansiyel denklemlerin çözümü:

- $$\frac{dy}{dt} + u(t)y = w(t)$$

- **1.adım:** y_c'nin bulunuşu:
$$\frac{dy}{dt} + u(t)y = 0 \quad \Longrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -u(t)$$
Her iki tarafında t üzerinden integralini alalım.

- $$\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}dt = \int -u(t)dt$$

- $$\ln y + c_1 = -\int u(t)dt \Longrightarrow y = e^{-\int u(t)dt}\underbrace{e^{-c_1}}_{=A} \Longrightarrow$$

- $$y_c = Ae^{-\int u(t)dt}$$

Değişken terime sahip diferansiyel denklemlerin çözümü:

- **2.adım:** y_p'nin bulunuşu:
- Bu durumda y_p'nin çözümü aşağıdaki formülde verilmiştir:

$$y_p = e^{-\int u(t)dt} \int w(t) e^{\int u(t)dt} dt$$

- Bu ifadenin kanıtını (diferansiyel denklem konusunu içeren) herhangi bir matematik kitabında bulabilirsiniz.
- **3.adim:** $y_G = y_c + y_p \Longrightarrow$
- $$y_G = e^{-\int u(t)dt} (A + \int w(t) e^{\int u(t)dt} dt)$$
- **4.adim:** Belirli çözümün bulunuşu: $t = 0$ zamanındaki $y(0)$ başlangıç değeri kullanılarak A sabitinin degeri bulunur.

Niteliksel-Grafiksel yaklaşım: 1 değişkenli faz diyagramları:

- Niceliksel çözüm elde edilemediğinde veya sadece niteliksel çözüm ile ilgilendiğimizde faz diyagramları "denge" hakkında bazı çıkarımlar yapmamıza yardımcı olur.
- **Faz Diyagramı:**
- $$\frac{dy}{dt} = f(y) \quad \text{olsun}$$
- y-ekseninde $\frac{dy}{dt}$ ve x-ekseninde y'nin yer aldığı bir düzlemde:
- Eğim=(karşı kenar / komşu kenar)=$\frac{d(\frac{dy}{dt})}{dy} = \frac{d\dot{y}}{dy}$
- $\frac{d(\frac{dy}{dt})}{dy} = \frac{d\dot{y}}{dy}$=y'nin zaman göre değişimindeki değişimin y'deki değişime oranı.
- $\frac{dy}{dt} = 0$ denge değerini yansıtır (bir başka deyişle y'nin zamana göre değişmediği y değerleri denge değerleridir ve x-ekseni üzerinde yer alır(lar)).
- $\frac{d\dot{y}}{dy} > 0$ ise kararsız (ıraksak).
- $\frac{d\dot{y}}{dy} < 0$ ise kararlı (yakınsak).

Niteliksel-Grafiksel yaklaşım: 1 değişkenli faz diyagramları:

- Şekil 5'e bakınız.
- x ekseninin üzerinde $\dot{y} > 0$ olduğundan y zamanla artar ve böylelikle eğim pozitifken x ekseninden yani dengeden ($\dot{y} = 0$) uzaklaşılır.
- x ekseninin altında $\dot{y} < 0$ olduğundan y zamanla azalır ve böylelikle eğim pozitifken x ekseninden yani dengeden ($\dot{y} = 0$) uzaklaşılır.
- x ekseninin üzerinde $\dot{y} > 0$ olduğundan y zamanla artar ve böylelikle eğim negatifken x eksenine yani dengeye ($\dot{y} = 0$) yakınlaşılır.
- x ekseninin altında $\dot{y} < 0$ olduğundan y zamanla azalır ve böylelikle eğim negatifken x eksenine yani dengeye ($\dot{y} = 0$) yakınlaşılır.

Diferansiyel Denklemler

Örnekler:

- **Örnek 1:** $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y - y^2 \quad (y \geq 0)$
- Denge değeri $\frac{dy}{dt} = 0$'dır.
- $\Longrightarrow \frac{1}{2}y - y^2 = 0 \Longrightarrow y(y - \frac{1}{2}) = 0 \Longrightarrow y^* = 0$ ve $y^* = \frac{1}{2}$ denge değerlerini oluşturur.
- Eğim ise $\frac{d\dot{y}}{dy} = \frac{1}{2} - 2y$'dir. $y^* = 0$ için eğim $\frac{1}{2} > 0$, yani denge kararsızdır. $y^* = \frac{1}{2}$ için eğim $\frac{-1}{2} < 0$, yani denge kararlıdır.
- **Örnek 2:** $\frac{dy}{dt} = (y+1)^2 - 16$
- Denge değeri $\frac{dy}{dt} = 0$'dır. $\Longrightarrow \frac{dy}{dt} = (y+1)^2 = 16 \Longrightarrow y^* = 3$ ve $y^* = -5$ denge değerlerini oluşturur.
- Eğim ise $\frac{d\dot{y}}{dy} = 2(y+1)$'dir. $y^* = 3$ için eğim $8 > 0$, yani denge kararsızdır.
- $y^* = -5$ için eğim $-8 < 0$, yani denge kararlıdır.

2. derece diferansiyel denklemlerin çözümü:

- $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = c \quad (a_1, a_2, c$ sabit$)$
- **1. adım:** $y_c =$'nin bulunuşu:
- $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = 0$'nin çözümü için $y = Ae^{rt}(\neq 0)$ çözümünü kullanalım. Böylelikle $\dot{y} = rAe^{rt}$ ve $\ddot{y} = r^2 Ae^{rt}$ olur.
- Bu değerleri ana denkleme yerleştirirsek:

$$Ae^{rt}(r^2 + a_1 r + a_2) = 0 \Longrightarrow \underbrace{(r^2 + a_1 r + a_2) = 0}_{\text{karakteristik denklem}} \Longrightarrow r_1, r_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

- Burada 3 durum söz konusudur:
- i)$a_1^2 > 4a_2$ (farklı reel kökler: $r_1 \neq r_2$)

$$y_c = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

- ii)$a_1^2 = 4a_2$ (tekrarlayan reel kökler: $r_1 = r_2$)

$$y_c = A_3 e^{rt} + A_4 t e^{rt}$$

- iii)$a_1^2 < 4a_2$ (karmaşık kökler)(bu durumu incelemeyeceğiz)

2. derece diferansiyel denklemlerin çözümü:

- **2. adım:** y_p'yi bulalım. y_p için $y = k$ genel çözümü deneyelim.
- Bu durumda $\ddot{y} = \dot{y} = 0$ olur.
$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = c$$
- $$a_2 k = c \Rightarrow k = \frac{c}{a_2} \quad (\text{eger} \quad a_2 \neq 0)$$
- $$y_p = \frac{c}{a_2} \quad (\text{eger} \quad a_2 \neq 0)$$
- $a_2 = 0$ ise $y = kt$ denenir. Bu durumda $\ddot{y} = 0$ ve $\dot{y} = k$ olur $\Longrightarrow a_1 k + a_2 kt = c \Rightarrow k = \frac{c}{a_1}$ (eger $a_1 \neq 0$ ise). Bu durumda $y_p = \frac{ct}{a_1}$ olur.
- $a_1 = a_2 = 0$ ise $y_t = kt^2$ denenir. Bu durumda $\ddot{y} = 2k$ ve $\dot{y} = 2tk$ olur $\Longrightarrow$ $2k + a_1 2kt + a_2 kt^2 = c \Rightarrow k = \frac{c}{2}$ (eger $a_1 = a_2 = 0$ ise). Bu durumda $y_p = \frac{ct^2}{2}$ olur.
- **3. adım:** $y_G = y_c + y_p$
- **4. adım:** 2 başlangıç koşulu kullanılarak belirli çözüm bulunur.

2. derece diferansiyel denklemlerin çözümü için örnek:

- $$\ddot{y} - 4\dot{y} - 12y = -48 \quad (y(0) = 6; y'(0) = 4)$$
- $y'(0)$; y'nin t'ye göre türevi alınmış fonksiyonda t=0 değerini bulmak anlamındadır.
- **1. adım:** y_c ='nin bulunusu:
- $\ddot{y} - 4\dot{y} - 12y = 0$'nin çözümü için $y = Ae^{rt}(\neq 0)$ çözümünü kullanalım.
- Böylelikle $\dot{y} = rAe^{rt}$ ve $\ddot{y} = r^2Ae^{rt}$ olur.
- Bu değerleri ana denkleme yerleştirirsek;

$$Ae^{rt}(r^2 - 4r - 12) = 0 \Longrightarrow \underbrace{(r^2 - 4r - 12) = 0}_{\text{karakteristik denklem}} \Longrightarrow r_1, r_2 = \{6, -2\}$$

$$y_c = A_1e^{6t} + A_2e^{-2t}$$

- **2. adım:** y_p'yi bulalım. y_p için $y = k$ genel çözümünü deneyelim. Bu durumda $\ddot{y} = \dot{y} = 0$ olur.
- $$-12k = -48 \Longrightarrow k = 4$$

$$y_p = 4$$

- **3. adım:** $y_G = A_1e^{6t} + A_2e^{-2t} + 4$

2. derece diferansiyel denklemlerin çözümü için örnek:

- **4. adım:** 2 başlangıç koşulu kullanılarak belirli çözüm bulunur.
- $y(0) = A_1 + A_2 + 4 = 6$
- $y'(0) = 6A_1 + (-2)A_2 = 4$
- Yukarıdaki 2 denklemin çözümünde $A_1 = 1$ ve $A_2 = 1$ elde edilir.
- $$y(t) = e^{6t} + e^{-2t} + 4$$

- **Dengenin dinamik istikrarı:**
- 1.durum: $(r_1 \neq r_2)$ Kararlılık koşulu $r_1, r_2 < 0$'dir. Diğer durumlarda denge kararsızdır.
- 2.durum: $(r_1 = r_2)$ Kararlılık koşulu $r < 0$'dır. Diğer durumlarda denge kararsızdır.

Özel durumdaki (değişken terimli) diferansiyel denklemlerinin çözümü:

- $$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b(t)$$
- Özel durumda sadece y_p etkilenecektir.
- İki özel durum inceleyeceğiz:
- **1.durum:** $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = B_1 t^2 + B_2 t + B_3$
- Bu durumda y_p için $y = B_1 t^2 + B_2 t + B_3$ denenir.

Özel durumdaki (değişken terimli) diferansiyel denklemlerinin çözümü:

- **Örnek:**
$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 3y = 6t^2 - t - 1$$

- Bu durumda y_p için $y = B_1 t^2 + B_2 t + B_3$ çözümünü deneyelim. $\dot{y} = 2B_1 t + B_2$ ve $\ddot{y} = 2B_1$ olur.
- Ana denklemde bu değerleri yerine yerleştirirsek:

$$2B_1 + 5(2B_1 t + B_2) + 3(B_1 t^2 + B_2 t + B_3) = 6t^2 - t - 1$$

- $$\underbrace{3B_1}_{=6} t^2 + (\underbrace{10B_1 + 3B_2}_{=-1})t + (\underbrace{2B_1 + 5B_2 + 3B_3}_{=-1}) = 6t^2 - t - 1$$

- Yukardaki 3 eşitlik çözülerek şu sonuçlar elde edilir: $B_1 = 2, B_2 = -7$ ve $B_3 = 10$.
- Bu durumda $y_p = 2t^2 - 7t + 10$ olur.
- **2.durum:** $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = Be^{-rt}$
- Bu durumda y_p için $y = Be^{-rt}$ denenir.
- Eger bu çözüm çalışmaz ise $y = tBe^{-rt}$ denenir.
- **Doğrusal olmayan diferansiyel denklemler**in çözümünü ise MATLAB programı ile gelecek dönem yapacağız.