Matematik I

Doç. Dr. Türkmen Göksel

AÜ SBF İktisat Bölümü

1 Sürekli Zamanda Dinamik Optimizasyon III

Faz Diyagramı: Eğrilerin Çizilmesi

- 1.adım: $\dot{k} = 0$ ve $\dot{c} = 0$ denklemlerini temsil eden eğrilerin çizimi:
- $\dot{k} = 0$ denklemi (k, x-ekseni)
- $$c = f(k) - \delta k \quad (\triangle 1)$$
- $\dot{c} = 0$ denklemi (c, y-ekseni)
- $$f'(k) = \delta + \rho \quad (\triangle 2)$$
- c (y-ekseni), k (x-ekseni) düzleminde
- $\dot{k} = 0$ denklemi: $f(k)$ eğrisi azalarak artan kesin konkavdır. Bu eğriden δk'nın çıkarılması ilgili eğri elde edilir.
- $\dot{c} = 0$ denklemi: $f'(k) = \delta + \rho$ ifadesinde sağ taraf bir sabite eşit olduğundan ve $f'(k)$ yani sermayenin marjinal getirisi k arttığında kesin azaldığından ($\triangle 2$) eşitliğini sağlayan tek bir $\hat{k}$ değeri vardır. Bu yüzden Şekil $\hat{k}$ noktasında dik bir eğridir.

Faz Diyagramı: İşaretlerin Belirlnemesi

- 2. adım: İşaretlerin Belirlenmesi
- $\dot{k} = 0$ eğrisinin y-eksenine göre analizi: $\frac{\partial \dot{k}}{\partial c} = -1 < 0 \Longrightarrow \dot{k}$ aşağıdan yukarı azalıyor.
- $\dot{c} = 0$ eğrisinin x-eksenine göre analizi: $\frac{\partial \dot{c}}{\partial k} = -\frac{U'(c)}{U''(c)} f''(k) < 0 \Longrightarrow \dot{c}$ soldan sağa azalıyor.

Sürekli Zamanda Dinamik Optimizasyon

İktisadi Örnek

- Fayda maksimizsayon problemi şöyle tanımlı olsun:

$$\max_{c(t)} \int_0^\infty e^{-\rho t} \sqrt{c(t)} dt$$

- s.t.

$$\dot{s} = r(t)s(t) + w(t) - c(t)$$

- $$s(0) > 0 \ \ veri$$

- Tüketim büyümesini ($\frac{\dot{c}}{c}$) hesaplayınız.
- $c(t)$ tüketim (seçim) değişkeni, $s(t)$ tasarruf (durum) değişkenidir.
- $w(t) > 0$ ve $r(t) > 0$ dışsal olarak belirlenen sırasıyla gelir ve faiz oranlarıdır.

İktisadi Örnek Devamı

- Current Hamiltonian fonksiyonu şu şekilde yazılır:

$$H_c \equiv \sqrt{c(t)} + m(t)(r(t)s(t) + w(t) - c(t))$$

- Gerekli koşullar:
- $\frac{\partial H_c}{\partial c(t)}$: $(1/2)(c(t))^{-1/2} - m(t) = 0 \Rightarrow (1/2)(c(t))^{-1/2} = m(t)$
- $\frac{\partial H_c}{\partial s(t)}$: $r(t)m(t) = -\dot{m(t)} + \rho m(t) \Rightarrow \frac{-\dot{m(t)}}{m(t)} = r(t) - \rho$
- $\dot{s}(t) = r(t)s(t) + w(t) - c(t)$
- $\lim_{t \to \infty} e^{-\rho t} m(t)s(t) = 0$ (Transversality Condition-TVC).

İktisadi Örnek Devamı

- İlk koşulda eşitliğin her iki yanının da t'ye göre türevini alırsak:
- $$(-1/4)(c(t))^{-3/2}\dot{c(t)} = \dot{m}(t)$$
- $$(-1/4)(c(t))^{-1/2}\frac{\dot{c(t)}}{c(t)} = \dot{m}(t)$$
- 1 nolu koşulu yukarıdaki denklemde yerine yazarsak:
- $$(-1/2)m(t)\frac{\dot{c(t)}}{c(t)} = \dot{m}(t)$$
- $$\frac{\dot{c(t)}}{c(t)} = (-2)\frac{\dot{m}(t)}{m(t)}$$
- 2 nolu koşulu yukarıda yerine yazarsak:
- $$\frac{\dot{c(t)}}{c(t)} = 2(r(t) - \rho)$$

Sürekli Zamanda Dinamik Optimizasyon

Önemli Notlar:

1. $\min \int f(x, u, t) = \max \int -f(x, u, t)$
2. Maksimizasyon için 2. dereceden koşul: $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} < 0$ (u seçim değişkeni)