

# MATEMATİKSEL MODELLEME

Matematiksel Modelleme, Gazi Kitabevi

Nuri ÖZALP

Ölçek



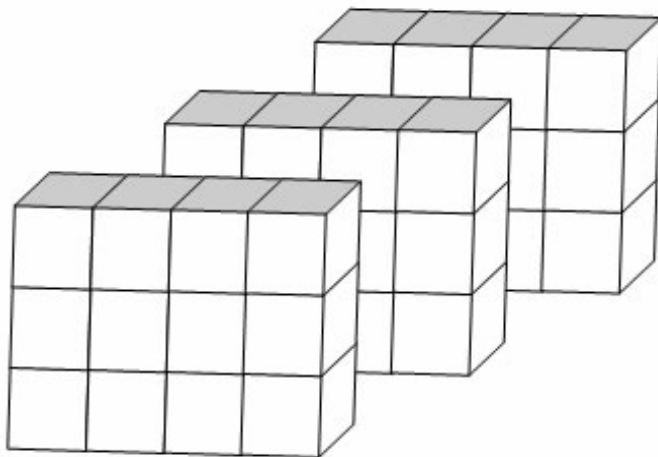
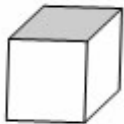
## Ölçek

### İçerik

- 1 Geometrik Olarak Benzer Cisimler
- 2 Büyüklük
- 3 Güç Çıktısı
- 4 Hareket
- 5 Ayak Sayısı
- 6 Duruş ve Denge
- 7 Paketleme ve Fiyat İlişkisi



## Geometrik Olarak Benzer Cisimler



Şekil: Uzunluk ve hacim arasındaki ilişki



**Gözlemler:**  $1 : L$  oranında sınırları olan iki kübün:

① Yüzey alanları oranı  $1 : L^2$  ; hacimleri oranı  $1 : L^3$  olur.



**Gözlemler:**  $1 : L$  oranında sınırları olan iki kübün:

① Yüzey alanları oranı  $1 : L^2$  ; hacimleri oranı  $1 : L^3$  olur.

②

$$\frac{\text{Bir cismin iki noktası arasındaki uzaklık}}{\text{Geometrik olarak benzer bir cismin karşılık gelen iki noktası arasındaki uzaklık}} = \frac{1}{L}$$

ise

Karşılık gelen alanlarının oranı  $1 : L^2$

Karşılık gelen hacimleri oranı  $1 : L^3$

olur.



**Gözlemler:**  $1 : L$  oranında sınırları olan iki kübün:

① Yüzey alanları oranı  $1 : L^2$  ; hacimleri oranı  $1 : L^3$  olur.

②

$$\frac{\text{Bir cismin iki noktası arasındaki uzaklık}}{\text{Geometrik olarak benzer bir cismin karşılık gelen iki noktası arasındaki uzaklık}} = \frac{1}{L}$$

ise

Karşılık gelen alanlarının oranı  $1 : L^2$

Karşılık gelen hacimleri oranı  $1 : L^3$

olur.

- Eğer hayvanlar şekilde değil de büyüklükte (en, boy, yükseklik, ağırlık) farklı ise, bu durumda birinin şekli biliniyorsa, geometrik olarak benzer olan herhangi diğer bir hayvan tek bir temsilci  $L$  uzunluğu (örneğin tek bir kemiğin toplam ağırlığı veya uzunluğu) ile açıklanabilir.



## Büyükük

- Bir kara hayvanı Şeklini değiştirmeden sonsuza kadar büyüeyebilir mi?



## Büyükük

- Bir kara hayvanı Şeklini değiştirmeden sonsuza kadar büyüeyebilir mi?
- Bir kemiğin bir etki (bastırma) veya tepki (kaldırma) yüküne karşı durma yeteneği kemiğin dik kesit **alanı** ile orantılı olup, kemik tarafından desteklenen ağırlık da **hacim** ile orantılıdır. Böylece örneğin bir başkasından **3** kat uzun ( $1 : 3$ ) olan bir hayvan, eğer yoğunluk aynı kabul edilirse, o hayvana göre **27** ( $1 : 3^3$ ) kat daha ağır olup, bacakları **9** ( $1 : 3^2$ ) kat daha fazla ağırlığa karşı koymalıdır.

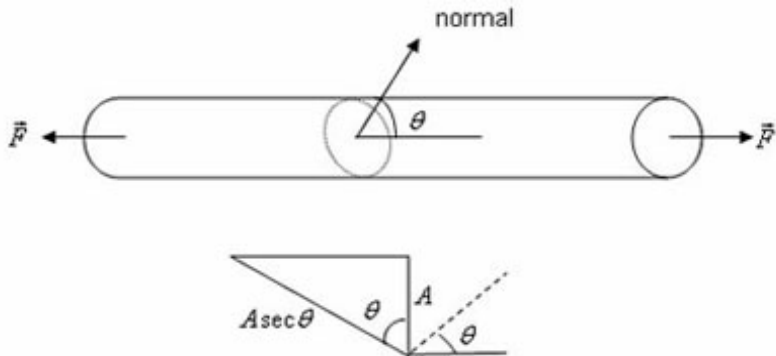




Katı bir cisim bir kuvvet sisteminin etkisi altında ve denge durumunda ise, cismin bozulma veya şekil değiştirme eğilimi oluşur. Böyle durumdaki katı cisme "baskı altındadır" denir. İç kuvvetler cismin her noktasında baskıya veya gerilmeye yol açar. Bir noktadaki baskı birim alandaki kuvvettir ve kuvvet ile bu kuvvete maruz kalan yüzeyin uyumuna bağlıdır.



Dik kesit alanı  $A$  olan ve bir  $F$  kuvveti ile gerdirilen düzgün ince bir çubuğu göz önüne alalım:



Şekil: İnce bir çubuğun gerilimi

$$\text{Düzlem kesiti boyunca olan gerilim} = \frac{\vec{F}}{A \sec \theta}$$

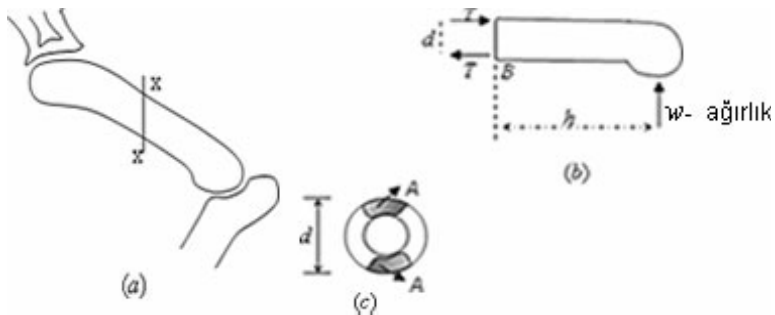


- Büyük kara memelilerinin geometrik olarak küçüklerle aynı olmadığı gözlemlenmiştir. Büyüklerin kemikleri daha sert olup, çok büyük memeliler kalça kemikleri dik olarak ayakta durmakta ve bu kemikler esnememektedir. Böylece eğilme gerilmesine daha çok maruz kalmaktadırlar.



- Büyük kara memelilerinin geometrik olarak küçüklerle aynı olmadığı gözlemlenmiştir. Büyüklerin kemikleri daha sert olup, çok büyük memeliler kalça kemikleri dik olarak ayakta durmakta ve bu kemikler esnememektedir. Böylece eğilme gerilmesine daha çok maruz kalmaktadırlar.
- SORU: Esnek kalça kemikli bir kara hayvanının şeklini değiştirmeden sonsuza kadar büyümesi mümkün müdür?





Şekil: Bir memelinin kalça kemiğindeki eğilme gerilimi

$B$  noktasında moment alınırsa,

$$Wh = Td \quad \Rightarrow \quad T = \frac{Wh}{d}$$

$W \propto L^3$ ,  $h \propto L$  ve  $d \propto L$  olduğundan  $T \propto L^3 L / L = L^3$  elde edilir.  $T$  kuvveti kemiğin  $A$  alanlı parçası tarafından gönderilir. Böylece,  $T(\propto L^3)$ ,  $A(\propto L^2)$  tarafından gönderilir. Bu ise  $T$  nin, ona karşı koyacak olan kemik kapasitesinden boyut olarak daha hızlı arttığını göstermektedir. O halde bir kara hayvanının *sonsuz* kadar büyümesi olanaksızdır.



## Güç Çıktısı

**Güç çıktısı:** birim zamanda yapılan iş.  $\propto L^2$

Nedeni

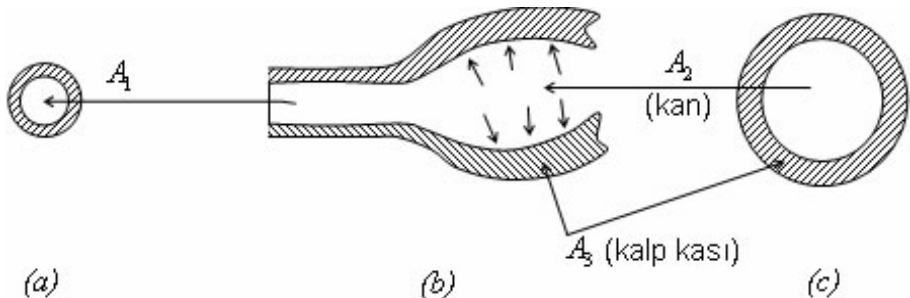
(i) **Isı kaybı oranı:**

Kas  $\rightarrow$  Kimyasal enerjiyi fiziksel (mekanik) enerjiye dönüştürür. %25 yeterlilikleri vardır %75 ısı olarak yüzey boyunca kaybolur. Isı kaybı  $L^2$  ile orantılı olup, eğer güç çıktısı  $L^3$  ile orantılı artarsa bu durumda büyük memeliler fazla ısınırlar.

(ii) **Oksijen kaynağı oranı:**

Dokuya oksijen sağlama oranı kan hacmine, bu da kan akış hızına bağlıdır.





**Şekil:** Kalp diyagramı: Çizgili kesimler kalp yüzeyini göstermektedir. (a) Aort (ana atardamar) boyunca bir dik kesit. (b) sol kısımdaki aort ile birlikte karıncığın uzunlaşmasına kesiti ve (c) karıncık boyunca dik kesit



$F$  her birim dik kesit alanı için kalp kası tarafından ortaya konulan maksimum kuvvet ve  $P$  kalpteki kan basıncı olsun. Bu durumda

$$FA_3 = PA_2$$

olur.  $F$  nin boyut ile değişmediği bilinmektedir. Bu durumda görülmektedir ki  $P$  de boyuta göre değişmez. Böylece aorttaki kanın akış hızı  $V$  boyuta göre değişmez. Buradan, birim zamanda kalp tarafından aktarılan kan hacmi  $A_1$  ile, dolayısı ile  $L^2$  ile orantılıdır. Bu da sonuçta güç çıktısını kısıtlar.



## Definitions

$$(\text{Kalp hacmi}) \times (\text{Atış oranı}) = VA_1$$

olup,

$$(\text{Atış oranı}) \propto L^2/L^3 = 1/L$$

elde edilir. "Bebeklerin kalp atışı daha hızlıdır." 😊



- (iii) **Kas ve kemiklerdeki baskıya göre kısıtlamalar:** Koşma anında, kaslar bacağın kinetik enerjisine eşit olan bir iş yapmak zorundadır. Basitlik için bacağın ağırlığının ayakta toplandığını kabul edelim.

$T$  = kaslardan gelen kuvvet

$d$  = kaslar tarafından hareket edilen uzaklık

olsun. Böylece,

$$Td = \frac{1}{2}mV^2$$

(Kasın yaptığı iş) = (kinetik enerji)

olur.  $T$  kas ve eklemlerin dayanma gücü ile sınırlıdır ve böylece  $T \propto L^2$  dir. Buradan,  $L^3 \propto L^3V^2$ , yani  $V$  boyut ile değişmez.

Kasların kasılması için geçen zaman  $t$  olsun. Böylece,  $tV \propto L$  olup,  $t \propto L/V \propto L$  dir. O halde kasın güç çıktısı =  $Td/t \propto L^2L/L = L^2$  olur.

