MATEMATİKSEL BİYOLOJİ

Matematiksel Modelleme, Gazi Kitabevi 2014

Nuri ÖZALP

Nüfus Dinamiği ve Kararlılık

Nüfus Dinamiği ve Kararlılık

İçerik

İki Tür Modeli

P_1 ve P_2 nüfuslu, iki türden oluşan küçük bir ekosistem göz önüne alalım. Her bir türün değişim oranının sadece türlerin nüfusuna bağımlı olduğunu kabul edelim. O halde, matematiksel modelimiz

$$\frac{dP_1}{dt} = g(P_1, P_2) \quad (1)$$

$$\frac{dP_2}{dt} = f(P_1, P_2) \quad (2)$$

şeklindedir.

Genel olarak bir türün etkisi, diğer türün nüfusunu artırmak veya azaltmak şeklindedir. Böylece iki tür arasında üç tip etkileşim oluşur.

- $+-$ $(-+)$ **av-avcı**; Bir tür diğerinin nüfusunu azaltıyor.
- $++$ (**ortaklık**); Her iki tür birbirinin nüfusunu artırıyor.
- $--$ (**yarışma**);Her iki tür de aynı yiyecek kaynağını kullanıyor.

İki tür için verilen (1)-(2) modelinde, eğer hiç bir türün dış göçü yoksa bu durumda

$$g(0, P_2) = 0 \text{ ve } f(P_1, 0) = 0$$

olur. (1)-(2) sisteminin faz düzlem denklemi,

$$\frac{dP_2}{dP_1} = \frac{f(P_1, P_2)}{g(P_1, P_2)} \tag{3}$$

iki-nüfus ekosisteminin *fazları* olarak adlandırılır. Bu denklemin çözümü nüfusların *yörüngelerini* verir.

$g(P_1, P_2)$ ve $f(P_1, P_2)$ zamana açık olarak bağlı olmadıklarından, verilen model *otonomdur*. Nüfusların etkileşimini çalışmak için ya (1)-(2) sistemini ya da (3) denklemini analiz etmek gerekir. Çoğu zaman her ikisinin de açık bir çözümünü bulmak mümkün değildir.

İki Tür Modeli - Kararlılık

Denge nüfusu-her iki nüfusun da zamanla değişmediği nüfus.
(doğum sayısı=ölüm sayısı)
(P_{1e}, P_{2e}) bir denge nüfusu ise

$$f(P_{1e}, P_{2e}) = 0 \quad (4)$$
$$g(P_{1e}, P_{2e}) = 0 \quad (5)$$

demektir. Denge durumunda, dP_2/dP_1 belirsizdir. Böylece, (P_{1e}, P_{2e}) noktası faz düzlem denkleminin bir **aykırı** (tekil) noktasıdır.

- Denge noktası (nüfusu) **kararlı** mıdır?
- Eğer her iki nüfus da denge nüfuslarına yakın ise, zaman içinde ne olur?

Kararlılık analizi: $0 < |\varepsilon| \ll 1$ için

$$
\begin{aligned}
P_1(t) &= P_{1e} + \varepsilon P_{11}(t) \\
P_2(t) &= P_{2e} + \varepsilon P_{21}(t)
\end{aligned}
$$

yi (1)-(2) sisteminde yerlerine yazıp, Taylor açılımında e^2 li terimleri atarsak

$$
\frac{dP_{11}(t)}{dt} = \frac{\partial g(P_{1e}, P_{2e})}{\partial P_1} P_{11}(t) + \frac{\partial g(P_{1e}, P_{2e})}{\partial P_2} P_{21}(t) \tag{6}
$$

$$
\frac{dP_{21}(t)}{dt} = \frac{\partial f(P_{1e}, P_{2e})}{\partial P_1} P_{11}(t) + \frac{\partial f(P_{1e}, P_{2e})}{\partial P_2} P_{21}(t) \tag{7}
$$

(6)-(7) sistemi birinci basamaktan bir lineer denklem sistemidir ve çözümü denge noktası komşuluğunda türlerin davranışını verir. Bu denklem sistemini matris formunda

$$\frac{dP}{dt} = JP$$

şeklinde de yazabiliriz. Burada J

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial g(P_{1e},P_{2e})}{\partial P_1} & \frac{\partial g(P_{1e},P_{2e})}{\partial P_2} \\ \\ \frac{\partial f(P_{1e},P_{2e})}{\partial P_1} & \frac{\partial f(P_{1e},P_{2e})}{\partial P_2} \end{bmatrix}$$

olup, sistemin Jakobiyen matrisidir.

Sistem (6)-(7) daha basit bir gösterimle

$$\frac{dx}{dt} = ax + by \tag{8}$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy \tag{9}$$

veya matris formda

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \frac{dX}{dt} = JX = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, a, b, c, d sabitler x ve y de denge noktasından sapma olarak alınabilir.

$c = 0$ ise (9) denklemi çözülebilir olup, çözümü

$$y(t) = k_1 e^{dt}, \quad (k_1 \text{ sabit})$$

ve

$$x(t) = \begin{cases} k_2 e^{at} + \dfrac{bk_1}{d-a} e^{dt}, & d \neq a \\ k_2 e^{at} + k_1 bte^{at}, & d = a \end{cases} \qquad (k_2 \text{ sabit})$$

$c \neq 0$ ise, (9) denkleminde türev alarak,

$$\frac{d^2y}{dt^2} - (a+d)\frac{dy}{dt} + (ad-bc)y = 0 \tag{10}$$

sabit katsayılı denklemi elde edilir ki *karakteristik denklemi*

$$r^2 - (a+d)r + (ad-bc) = 0$$

veya

$$r^2 - \mathrm{iz}(J)r + \det(J) = 0$$

olup, dikkat edilirse bu denklem $\dfrac{dX}{dt} = JX$ sisteminde J matrisinin karakteristik denklemidir. Kökleri ise

$$r_{1,2} = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

olup J nin özdeğerlerini verir.

Durum 1. r_1 ve r_2 reel ve $r_1 \neq r_2$.
(10) denkleminin genel çözümü

$$y(t) = k_3 e^{r_1 t} + k_4 e^{r_2 t}, \ (k_3, k_4 \text{ isteksel sabitler}) \tag{11}$$

olup, (9) eşitliğinden,

$$x(t) = \frac{k_3(r_1 - d)}{c} e^{r_1 t} + \frac{k_4(r_2 - d)}{c} e^{r_2 t} \tag{12}$$

elde edilir. O halde (11) ve (12), $t \to \infty$ için

$$(x(t), y(t)) \longrightarrow \begin{cases} (0,0), & (r_1, r_2 < 0) \\ xy\text{–de bir nokta}, & (\text{bir kök} < 0, \ \text{diğer kök} = 0) \end{cases}$$

verir.

Durum 2. $r_1 = r_2$.

$$y(t) = k_3 e^{r_1 t} + k_4 t e^{r_1 t}, \ (k_3, k_4 \text{ isteksel sabitler}) \tag{13}$$

$$x(t) = \frac{k_3(r_1 - d)}{c} e^{r_1 t} + \frac{k_4(1 + r_1 t - dt)}{c} e^{r_1 t} \tag{14}$$

elde edilir. Böylece, $t \to \infty$ için

$$(x(t), y(t)) \longrightarrow \begin{cases} (0,0), & (r_1 < 0) \\ \infty \text{ da bir nokta}, & (r_1 = 0) \end{cases}$$

olur.

Durum 3. Kompleks eşlenik kökler: $r_1 = \alpha + i\beta,\ r_2 = \alpha - i\beta.$

$$y(t) = k_3 e^{\alpha t}\cos\beta t + k_4 e^{\alpha t}\sin\beta t \tag{15}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{k_3 e^{\alpha t}}{c}(\alpha\cos\beta t - \beta\sin\beta t - d\cos\beta t) \\ &\quad + \frac{k_4 e^{\alpha t}}{c}(\alpha\sin\beta t + \beta\cos\beta t - d\sin\beta t) \end{aligned} \tag{16}$$

bulunur. $t \to \infty$ için

$$(x(t), y(t)) \longrightarrow (0,0), \quad (\alpha < 0)$$

elde edilir.

Yukarıdaki durumları göz önüne alarak aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

Bir denge çözümü,

(i) **kararlıdır** eğer her iki kökün reel kısımları negatif ise,

(ii) **etkisiz kararlıdır** (yani çözüm $t \longrightarrow \infty$ için bir denge noktasına yaklaşmaz), eğer her iki kök sıfır değilse, ve bir kökün reel kısmı sıfır ve diğeri küçük veya eşit sıfır ise (Durum 1 ve 3),

(iii) **cebirsel kararsızdır** (yani çözüm t nin bir cebirsel kuvveti ile büyür) eğer her iki kök de sıfır ise (Durum 2, dengenin etkisiz kararlı olduğu $a = b = c = d = 0$ hariç),

(iv) **kararsızdır** eğer bir kökün reel kısmı pozitif ise.

Bu veriler ışığında aşağıdaki tabloyu oluşturabiliriz:

$$r = \frac{a + d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

ifadesinde $p = a + d$, $q = ad - bc$, $\triangle = p^2 - 4q$ olsun.

DURUM			KÖKLER	KARARLILIK
I.	$\triangle > 0$		Reel ve farklı	
A.	$q > 0$		aynı işaret	
		(a) $p > 0$	her ikisi de $+$	Kararsız
		(b) $p < 0$	her ikisi de $-$	Kararlı
B.	$q = 0$		bir kök sıfır	
		(a) $p > 0$	diğer kök $+$	Kararsız
		(b) $p < 0$	diğer kök $-$	Etkisiz kararlı
C.	$q < 0$		zıt işaretler	Kararsız

II.	$\triangle = 0$		Reel ve eşit	
	A.	$p > 0$	her ikisi de $+$	Kararsız
	B.	$p = 0$		
		(**a**) en az bir $a, b, c, d \neq 0$	her ikisi de sıfır	Cebirsel kararsız
		(**b**) $a, b, c, d = 0$	her ikisi de sıfır	Etkisiz kararlı
	C.	$p < 0$	her ikisi de $-$	Kararlı
III.	$\triangle < 0$		Karmaşık eşlenik	
	A.	$p > 0$	reel kısım $+$	Kararsız
	B.	$p = 0$	reel kısım sıfır	Etkisiz kararlı
	C.	$p < 0$	reel kısım $-$	Kararlı

Eğer a, b, c, d ölçümlerinde küçük hatalar var ise ve bunlar p, q, $\triangle$ hesaplamalarında da küçük hatalar doğuruyorsa, bu durumda yukarıdaki durumlar değişimle karşı karşıya kalır. Ölçümlerdeki küçük hataların değişime yol açmadığı durumlara **temel durumlar** denir. Buna göre, I(A), I(C), III(A) ve III(C) durumları temel durumlardır. Diğer durumlar ise **sınır durumları** olarak adlandırılır. Eşit işareti içeren herhangi bir durum sınır durumudur.

Temel durumlarda lineer sistemin davranışı (en azından denge çözümü komşuluğunda) lineer olmayan sisteme duyarlı bir yaklaşımdır. Dahası, lineer olmayan bir sistem için bir sınır denge nüfusunun kararlılığı, onun lineerleştirilmişi ile aynıdır (III(B): $\triangle < 0$, $p = 0$ durumu hariç ki bu sınır durumu, kararlılık bölgesini kararsızlık bölgesinden ayırır). Tüm sınır durumları için faz düzlem analizi ile birlikte bu sınır durumunun kararlılığında; denge noktasının yakın komşuluğunda duyarlı bir yaklaşım elde etmek için lineerleştirme işleminde göz ardı edilen bazı lineer olmayan terimler gerekli olabilir. Bunun için genellikle Taylor serisindeki ikinci derece terimleri eklemek yeterlidir.

İki Tür Modeli – Faz Düzlemi

(8)-(9) sisteminin faz düzlem denklemi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by} \tag{17}$$

olup, zamana açık olarak bağlı değildir. Bir *yörünge* boyunca nüfusun nasıl değiştiğini belirlemek için, zamana bağlı denklemde değişim yönünü gösteren ok işaretleri kullanacağız. Faz düzlem denklemi kendi başına kararlılığı veya kararsızlığı belirleyemez. t zamanını $-t$ ile değiştirmek bir kararlı denge noktasını kararsız bir denge noktasına dönüştürebilir fakat faz düzlem denklemi aynı kalır. Örneğin çözümdeki e^{-t} tipi bir terim e^{t} ye dönüşür fakat faz düzlem denklemi değişmez. Kararlılığın belirlenmesinde zamana bağlı denklemin kullanılması zorunluluğunu göstermek için aşağıdaki örnek yeterli olacaktır.

Example

Aşağıdaki iki sistemi göz önüne alalım.

$$\left\{ \frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = y \ ; \qquad x(0) = x_0, \ y(0) = y_0 \right\} \tag{18}$$

$$\left\{ \frac{dx}{dt} = -2x, \quad \frac{dy}{dt} = -2y \ ; \qquad x(0) = x_0, \ y(0) = y_0 \right\}. \tag{19}$$

İlk sistemin çözümü $\left\{x = x_0 e^t, \ y = y_0 e^t\right\}$, ve ikinci sistemin çözümü ise $\left\{x = x_0 e^{-2t}, \ y = y_0 e^{-2t}\right\}$ dir. Böylece (18) sistemi kararsız, ve (19) sistemi kararlıdır. Fakat her iki sistemin faz düzlem denklemleri aynı olup,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

dir.

Eğer a, b, c, d sabitlerinin hepsinin birden işaretlerini değiştirirsek, faz düzlem denklemi değişmez kalır. $p = a + d$, $q = ad - bc$ ve $\triangle = p^2 - 4q$ olduğundan, bu durumda sadece p nin işareti değişir. Böylece, eğer faz düzlem denklemini göz önüne alırsak, $p > 0$ ve $p < 0$ durumlarını ayrı ayrı incelemek gerekmez. Ters doğrultudaki hareketi gösteren oklar kullanmak yeterli olur. Şimdi aşağıdaki temel durumları göz önüne alalım:

I(A) : $\triangle > 0$, $q > 0$; I(C) : $\triangle > 0$, $q < 0$; III(A) : $\triangle < 0$, $p > 0$; III(C) : $\triangle < 0$, $p < 0$. Yukarıdaki açıklamalara göre son iki durum $\triangle < 0$, $p \neq 0$ durumu olarak düşünülebilir.

I(A) : $\triangle > 0,\ q > 0$ durumu.

Kökler farklı ve reeldir. $p > 0$ iken kökler pozitiftir. $p < 0$ iken kökler negatiftir. Genelliği bozmaksızın $c \neq 0$ kabul edelim.

$$x(t) = \frac{k_3(r_1 - d)}{c} e^{r_1 t} + \frac{k_4(r_2 - d)}{c} e^{r_2 t} \tag{20}$$

$$y(t) = k_3 e^{r_1 t} + k_4 e^{r_2 t} \tag{21}$$

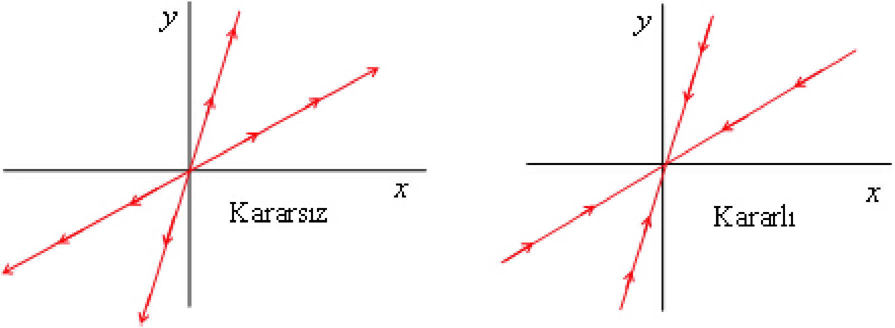
dir. $r_2 > r_1$ $(r_2 > r_1 > 0$ veya $0 > r_2 > r_1)$ olsun. Basit yörüngeler $k_3 = 0$ ise

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= k_4 \frac{r_2 - d}{c} e^{r_2 t} \\ y(t) &= k_4 e^{r_2 t} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{x}{y} = \frac{r_2 - d}{c} \tag{22}$$

$k_4 = 0$ ise,

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= k_3 \frac{r_1 - d}{c} e^{r_1 t} \\ y(t) &= k_3 e^{r_1 t} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{x}{y} = \frac{r_1 - d}{c} \tag{23}$$

olur.



Şekil: Her iki eğim de pozitif kabul edilmiştir.

Zamana bağlı çözümler göstermektedir ki bu yörüngeler ya orjinden uzaklaşmaktadır (kararsız durum, her iki kök de pozitif), ya da orjine doğru yaklaşmaktadır (kararlı durum, her iki kök de negatif).

Diğer yörüngeleri çizmek için $x(t)$ ve $y(t)$ nin $t \to \pm\infty$ iken asimptotik davranışını inceleyelim: $r_2 > r_1$ olduğundan

$$t \to \infty \text{ iken } \begin{cases} x \to k_4 \dfrac{r_2 - d}{c} e^{r_2 t} \to \begin{cases} \pm\infty \\ 0 \end{cases} \text{her iki kök } \begin{matrix} \text{pozitif} \\ \text{negatif} \end{matrix} \\ y \to k_4 e^{r_2 t} \to \begin{cases} \pm\infty \\ 0 \end{cases} \text{her iki kök } \begin{matrix} \text{pozitif} \\ \text{negatif} \end{matrix} \end{cases}$$

$$t \to -\infty \text{ iken } \begin{cases} x \to k_3 \dfrac{r_1 - d}{c} e^{r_1 t} \to \begin{cases} 0 \\ \pm\infty \end{cases} \text{her iki kök } \begin{matrix} \text{pozitif} \\ \text{negatif} \end{matrix} \\ y \to k_3 e^{r_1 t} \to \begin{cases} 0 \\ \pm\infty \end{cases} \text{her iki kök } \begin{matrix} \text{pozitif} \\ \text{negatif} \end{matrix} \end{cases}$$

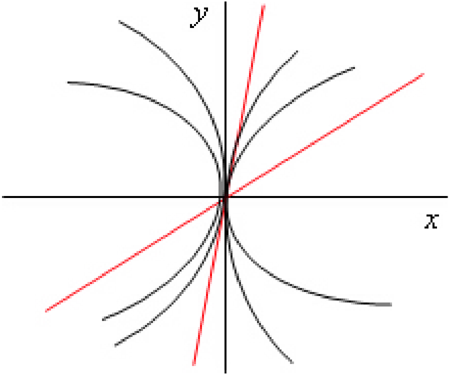
Böylece x ve y sonsuza giderken yörüngeler de

$$\frac{x}{y} = \begin{cases} \dfrac{r_2 - d}{c} & \text{her iki kök pozitif} \\ \dfrac{r_1 - d}{c} & \text{her iki kök negatif} \end{cases}$$

doğrusal yörüngelerinden birine paralel hareket ederler. Yörüngeler orjine yaklaşırken, doğrusal yörüngelere teğet olarak yaklaşırlar:

$$\frac{x}{y} \to \begin{cases} \dfrac{r_2 - d}{c} & \text{her iki kök negatif} \\ \dfrac{r_1 - d}{c} & \text{her iki kök pozitif} \end{cases}$$

Bazı tipik yörüngeler Şekilde verilmiştir.



Şekil: Nod: Tipik yörüngeler.

Bu tür durumdaki denge noktasına, yörüngeler sıfıra gidiyorsa bir **kararlı nod**; yörüngeler sıfırdan uzaklaşıyorsa, bir **kararsız nod** denir.

I(C) : $\triangle > 0$, $q < 0$ durumu.
Kökler zıt işarettedir. $c \neq 0$ ise

$$x(t) = \frac{k_3(r_1 - d)}{c} e^{r_1 t} + \frac{k_4(r_2 - d)}{c} e^{r_2 t}$$

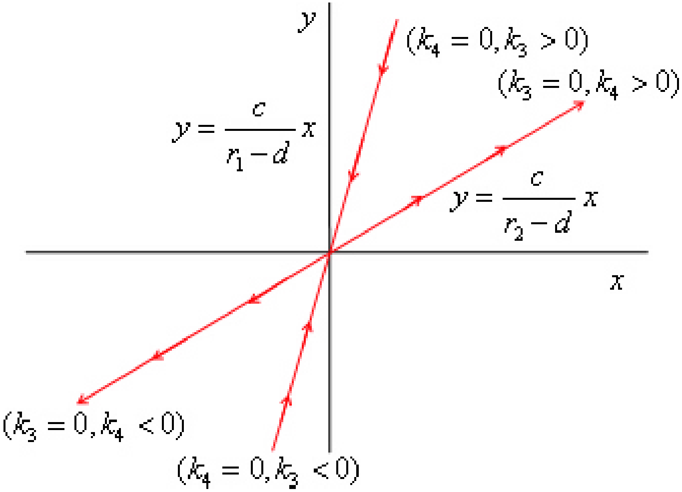
$$y(t) = k_3 e^{r_1 t} + k_4 e^{r_2 t}$$

$r_1 < 0 < r_2$ olsun. $k_3 = 0$ ise

$$\left.\begin{array}{r} x(t) = k_4 \dfrac{r_2 - d}{c} e^{r_2 t} \\ y(t) = k_4 e^{r_2 t} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{x}{y} = \frac{r_2 - d}{c}$$

$k_4 = 0$ için

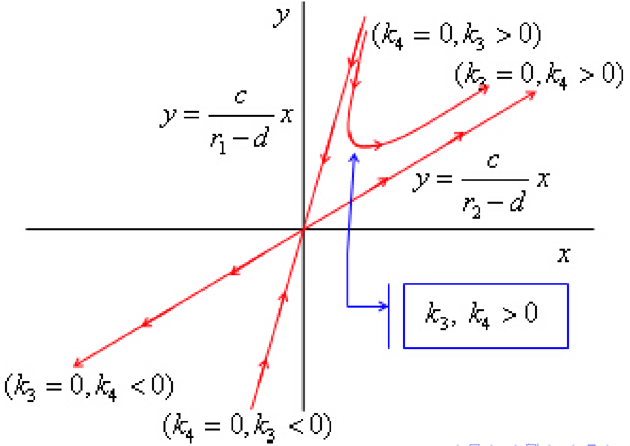
$$\left.\begin{array}{r} x(t) = k_3 \dfrac{r_1 - d}{c} e^{r_1 t} \\ y(t) = k_3 e^{r_1 t} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{x}{y} = \frac{r_1 - d}{c}$$

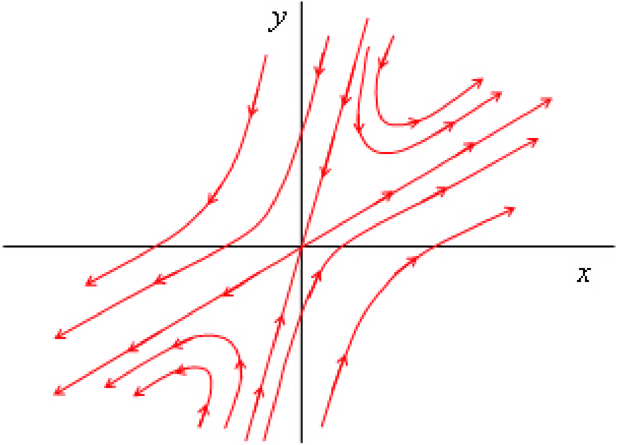


Şekil: Bazı önemli yörüngeler.

Diğer yörüngeler ($k_3 \neq 0$ ve $k_4 \neq 0$) $r_1 < 0 < r_2$ için

$$t \to \infty \text{ iken } \begin{cases} x \to k_4 \dfrac{r_2 - d}{c} e^{r_2 t} \\ y \to k_4 e^{r_2 t} \end{cases} \qquad t \to -\infty \text{ iken } \begin{cases} x \to k_3 \dfrac{r_1 - d}{c} e^{r_1 t} \\ y \to k_3 e^{r_1 t} \end{cases}$$





Şekil: Bir semer noktası komşuluğunda yörüngeler.

Bu tip bir denge noktası bir **semer noktası** olarak adlandırılır. Bu bir kararsız denge noktasıdır, çünkü bu nokta komşuluğundaki çoğu yörüngeler noktadan uzaklaşmaktadırlar.

Faz düzlem denklemini hemen çizmek için en önemli eğriler doğrusal yörüngelerdir ki bunlar denge noktasını kesen tek yörüngeler olup, bu türden tüm doğrusal yörüngeleri belirlemek için kolay bir yol, faz düzlem denkleminde $y = mx$ dönüşümü yapmaktır. Böylece,

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by} = \frac{c + dm}{a + bm}$$

veya $bm^2 + (a - d)m - c = 0$ olup, buradan

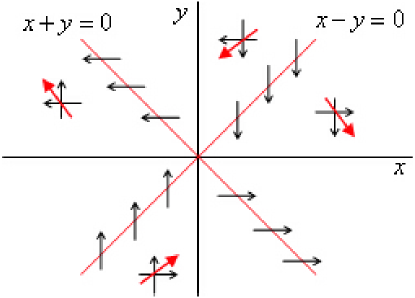
$$m = \frac{d - a \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2b} \tag{24}$$

elde edilir ki bunun $y/x = c/(r - d)$ ye denk olduğu gösterilebilir. Bağımsız değişken t ye göre, üzerinde çözümün eğiminin sabit olduğu bir eğriye bir **eşyönlü** denir. Doğrusal yörüngeleri ve basit eşyönlüleri (ki bunlar üzerinde $dy/dx = 0$ ve $dy/dx = \infty$ dur) bilmek, örneğin bir semer noktalı faz düzlem denklemini kolayca çizmemizi mümkün kılar.

$\left\{ \frac{dx}{dt} = x - y, \ \ \frac{dy}{dt} = -2x - 2y \right\}$ sistemini göz önüne alalım. $p = a + d = -1$, $q = ad - bc = -4$, $\triangle = p^2 - 4q = 17$ olup, $\triangle > 0$ ve $q < 0$ olduğundan semer noktası vardır. Faz düzlem denklemi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(x+y)}{x-y}$$

olduğundan **eşyönlüler**: $x - y = 0$ ve $x + y = 0$ doğrularıdır

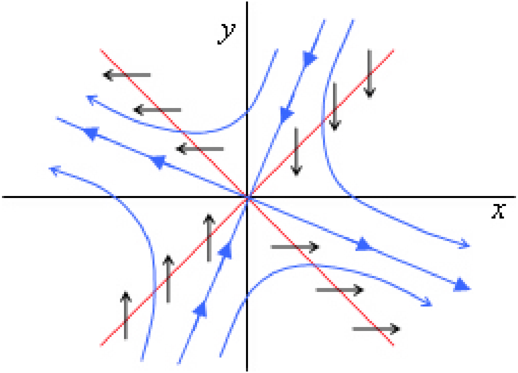


Şekil: Eşyönlüler (oklar zamana bağlı denklemden alınmıştır).

$y = mx$ doğrusal yörüngelerinin eğimleri (24) den

$$m = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{-2} \doteqdot 3.56 \text{ veya } -0.56$$

olup, **basit yörüngeler** $y = 3.56x$ ve $y = -0.56x$ dir. Böylece, aşağıdaki grafiği çizebiliriz.



Şekil: Bir semer noktası komşuluğunda yörüngeler (basit eşyönlüler ve doğrusal yörüngeler temel alınmıştır).

III (A) ve (C) : $\triangle < 0$, $p \neq 0$ durumu.
Kökler karmaşık eşleniktir. $p > 0$ ise reel kısım pozitif, $p < 0$ ise reel kısım negatiftir. $\theta = \arctan(y/x)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{x^2} \\ &= \frac{x(cx+dy) - y(ax+by)}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

ve düzenlenirse,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{cx^2 + (d-a)xy - by^2}{x^2+y^2} \qquad (25)$$

elde edilir.

$d\theta/dt \neq 0$ dır; aksi halde $cx^2 + (d-a)xy - by^2 = 0$ olup, buradan

$$\frac{x}{y} = \frac{a - d \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c}$$

bulunur. Kökler karmaşık olduğundan,
$\triangle = (a+d)^2 - 4(ad - bc) = a^2 - 2ad + d^2 + 4bc = (a-d)^2 + 4bc < 0$ dır. Bu ise x ve y nin reel olması ile çelişir. O halde ya $d\theta/dt > 0$ veya $d\theta/dt < 0$ olmalıdır. $d\theta/dt$ nin hep aynı işarete sahip olması, $\theta(t)$ nin ya hep azalması ya da hep artması demektir. Bu durumda, çözüm ya orjinden dışa doğru ya da orjine doğru bir spiral çizer.
$\triangle < 0$ olduğundan b ve c zıt işaretlere sahiptir. θ nın artmasını veya azalmasını bilmemiz, yörüngeleri çizmemiz için yeterli değildir. Faz düzlem yörüngelerini çizmek için $cx + dy = 0$ ve $ax + by = 0$ basit eşyönlülerini kullanabiliriz.

Example

$$\left\{\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = -bx + ay\right\}$$

sistemini göz önüne alalım. $p = 2a$, $q = a^2 + b^2$, $\triangle = -4b^2 < 0$ olur. Böylece, iki duruma sahibiz:

$$\begin{aligned} a &> 0 \text{ için } \textbf{III(A)} \text{ kararsız durumu,} \\ a &< 0 \text{ için } \textbf{III(C)} \text{ kararlı durumu.} \end{aligned}$$

(25) denkleminden

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-b(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = -b \tag{26}$$

olup, böylece eğer $b < 0$ ise $\theta(t)$ artan, ve eğer $b > 0$ ise $\theta(t)$ azalandır.

Example (devam)

Şimdi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-bx + ay}{ax + by}$$

faz düzlem denklemini göz önüne alalım. Denklem homogen bir denklem olup, $y/x = v$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{a}{b}\arctan v &= -\ln\left[x(1+v^2)^{1/2}\right] + c \\ &\Longrightarrow -\frac{a}{b}\theta - c = \ln(x^2+y^2)^{1/2} \\ &\Longrightarrow (x^2+y^2)^{1/2} = e^{-\frac{a}{b}\theta - c} \end{aligned}$$

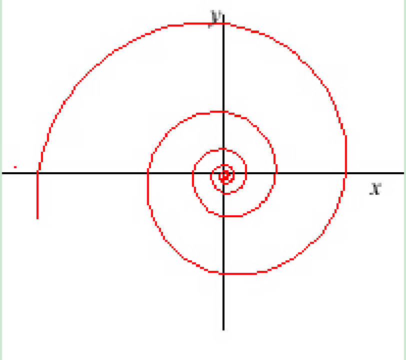
veya

$$r = ke^{-\frac{a}{b}\theta}, \quad k > 0 \tag{27}$$

elde edilir.

Example (devam)

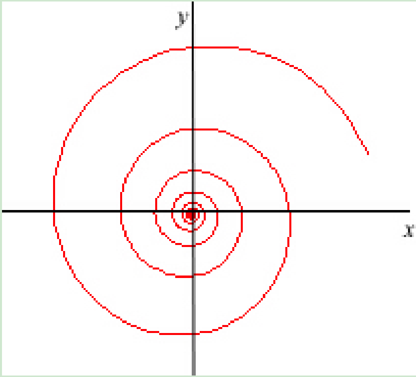
$a \neq 0$ için (27) denklemi **üstel spiral** *olarak adlandırılır. Eğer $a = 0$ ise $r = k$ çemberi elde edilir. Bu durumda karakteristik kökler $\pm ib$ olup, x ve y, dairesel b frekanslı, zamana göre basit harmonik hareketi temsil eder. Eğer* $a/b < 0$ ise, θ artarken r de artar.



Şekil: Sol yönlü spiral.

Example (devam)

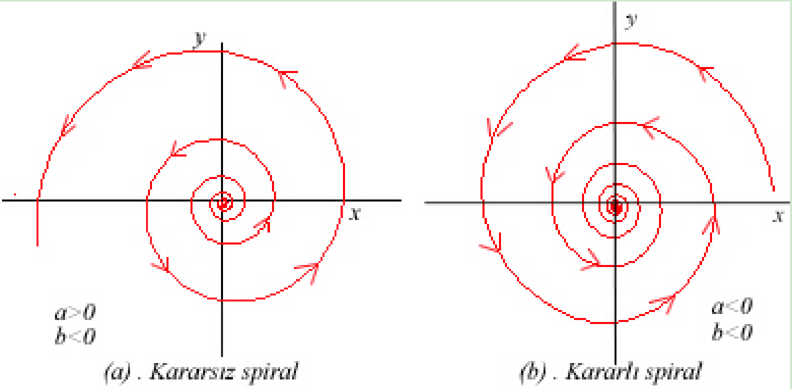
Eğer $a/b > 0$ ise, θ artarken r azalır.



Şekil: Sağ yönlü spiral.

Example (devam)

Zamana bağlı denklemi çözümün geçici hesabı için kullanabiliriz. Örneğin, $x = 0$ da $dx/dt = by$ dir. Böylece, $x = 0$ da $by < 0$ ise x azalır ve $by > 0$ ise x artar.



Şekil: Spiral yörünge.

Bu ve önceki kesimi aşağıdaki gibi özetleyebiliriz:

- Eğer Jakobiyen matrisinin özdeğerleri (karakteristik denkleminin kökleri) negatif ise veya negatif reel kısıma sahipse bu durumda $(0,0)$ noktası **asimptotik kararlıdır** $(\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t) = (0,0))$.
- Eğer, Jakobiyen matrisinin özdeğerleri pozitif değilse veya pozitif olmayan reel kısıma sahipse bu durumda $(0,0)$ noktası **kararlıdır**.
- Eğer, Jakobiyen matrisinin özdeğerleri pozitif ise veya pozitif reel kısıma sahipse bu durumda $(0,0)$ noktası **kararsızdır**.

Böylece

$$r^2 - (a+d)r + (ad - bc) = r^2 - \mathrm{iz}(J)r + \det(J) = 0$$

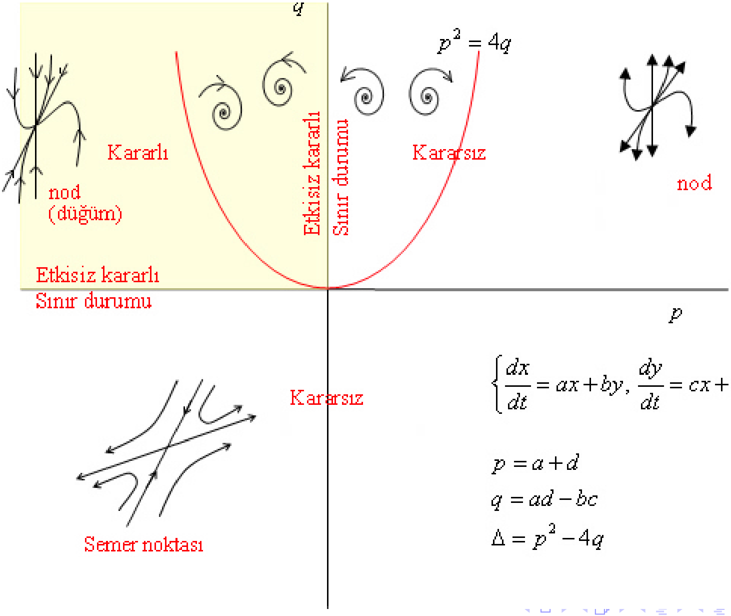
karakteristik denklemine Routh-Hurwitz kriterini (özdeğerler karmaşık düzlemin sol yanında kalırlar ancak ve ancak karakteristik denklemin katsayıları pozitiftir) uygulayarak kararlılığı belirleyebiliriz:

1. $(0,0)$ noktası *asimptotik kararlıdır* ancak ve ancak $\mathrm{iz}(J) < 0$ ve $\det(J) > 0$.
2. $(0,0)$ noktası *kararlıdır* ancak ve ancak $\mathrm{iz}(J) \leq 0$ ve $\det(J) > 0$.
3. $(0,0)$ noktası *kararsızdır* ancak ve ancak $\mathrm{iz}(J) > 0$ ve $\det(J) < 0$.

Ayrıca; $(0,0)$ noktası

1. **düğümdür,** eğer r_1, r_2 reel ve aynı işarete sahipse ($r_1 \leq r_2 < 0$ (düzgün) veya $0 < r_1 \leq r_2$ (düzgün olmayan),
2. **semerdir,** eğer r_1, r_2 reel ve zıt işarete sahipse ($r_1 r_2 < 0$),
3. **spiraldir,** eğer r_1, r_2 karmaşık ve reel kısım sıfırdan farklı ise,
4. **merkezdir,** eğer r_1, r_2 karmaşık ve reel kısım sıfır ise.

Şekil bu ve önceki kesimi özetlemektedir.



$$\left\{ \frac{dx}{dt} = ax + by, \ \frac{dy}{dt} = cx + dy \right\}$$

$$p = a + d$$

$$q = ad - bc$$

$$\Delta = p^2 - 4q$$

İki Tür Modeli - Orbitler

Şimdi

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = g(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = f(x,y) \end{cases} \tag{28}$$

otonom sistemini göz önüne alalım. Burada $f,\ g \in C^1(D)$ ve D de $xy-$ düzleminde bir bölgedir. (28) sistemi her zaman bir çözüme sahiptir. $(x_0, y_0) \in D$ olmak üzere, $t = t_0$ da

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \tag{29}$$

başlangıç koşulu ile verilen (28)-(29) başlangıç değer probleminin $t = t_0$ noktasını içeren bir aralıkta *tek bir çözümü* vardır. ((28) sisteminin çözümü olan ve $\{x = x(t),\ y = y(t)\}$ parametrik denklemiyle verilen eğriye bir **orbit (yörünge)** denir.

Theorem

Eğer $\{x = x(t), y = y(t)\}$ *, (28) sisteminin bir çözümü ise, bu durumda herhangi bir* c *sabiti için*

$$\{x_1(t) = x(t+c),\ y_1(t) = y(t+c)\}$$

fonksiyonları da (28) sisteminin bir çözümüdür.

Bu teorem, orbitin başlangıç zamanından bağımsız olduğunu söylemektedir. Bir *sistemin çözümü* ile bir *orbit* arasındaki temel farkı not etmekte yarar vardır: Bir orbit, parametrik olarak birden fazla çözümle temsil edilebilen bir eğridir. Örneğin, $\{x(t), y(t)\}$ ve $\{x(t+c), y(t+c)\}$ çiftleri farklı çözümleri temsil ederler, fakat parametrik olarak aynı eğriyi gösterirler. Yani her iki çözümün de orbiti aynıdır.

Example

$$\left\{ \frac{dx}{dt} = -y, \; \frac{dy}{dt} = x \right\}$$

sistemi için

$$\{x(t) = \cos t, \; y(t) = \sin t \; \}$$

ve

$$\left\{ x(t) = \cos(t + \frac{\pi}{3}), \; y(t) = \sin(t + \frac{\pi}{3}) \right\}$$

çiftlerinin farklı iki çözüm oldukları açıktır. Fakat her ikisi de aynı

$$x^2 + y^2 = 1$$

orbitinin parametrik denklemidirler.

Theorem

Verilen bir (x_0, y_0) noktasından geçen en fazla bir orbit vardır.

Fact

$C_1 : \{x_1(t),\ \ y_1(t)\}$ *ve* $C_2 : \{x_2(t),\ \ y_2(t)\}$ (x_0, y_0) *noktasından geçen farklı iki orbit olsun. Çözümün tekliğinden dolayı bu iki orbit* (x_0, y_0) *noktasından iki farklı* t_1 *ve* t_2 *zamanında geçmelidir. Yani,* $(x_1(t_1), y_1(t_1)) = (x_0, t_0) = (x_2(t_2), y_2(t_2))$ *olmalıdır. Önceki teoremden,*

$$\{x(t) = x_1(t + (t_1 - t_2)),\ y(t) = y_1(t + (t_1 - t_2))\} \tag{30}$$

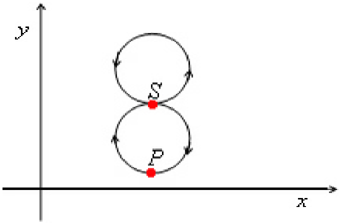
de (28) sisteminin bir çözümüdür.
$x(t_2) = x_1(t_1) = x_0,\ y(t_2) = y_1(t_1) = y_0$ *olduğundan, teklik nedeniyle* $x(t) = x_2(t),\ y(t) = y_2(t)$ *dir. Diğer taraftan (30),* $\{x_1(t), y_1(t)\}$ *ile verilen orbitin yeniden parametrizasyonundan başka bir şey değildir. O halde* $C_1 \equiv C_2$ *olmalıdır.*

(28) sisteminin bir (x_c, y_c) kritik (denge) noktasında $g(x_c, y_c) = 0 = f(x_c, y_c)$ olup,

$$\frac{dx}{dt} = 0 = \frac{dy}{dt} \Longleftrightarrow x = \text{sabit},\ y = \text{sabit}$$

olduğundan kritik noktadan geçen bir yörünge sadece bu noktayı içerir. Kritik olmayan bir noktaya bir **düzgün** (regüler**)** nokta denir. Bir düzgün noktadan başlayan bir yörünge; türevlerden en az biri sıfırdan farklı olacağından, bu noktadan uzaklaşır.

Otonom bir sistemin yörüngesi asla **kendini kesmez**. Bunun nedeni, dx/dt ve dy/dt bir noktada bütünüyle o noktanın koordinatları ile belirlenir. Eğer yörünge bu noktaya ileriki bir zamanda tekrar geri dönerse, dy/dx eğimi bu noktada iki farklı zamanda aynı olur. Böylece hareket doğrultusu her iki zamanda da aynıdır. Sonuç: eğer bir yörünge bir düzgün noktada başlıyorsa; yörünge asla başlama noktasına dönmez, veya aynı noktaya döner ve aynı kapalı eğriden tekrar tekrar geçer.



Şekil: Eğer yörünge P de başlarsa, S ye ilk ulaştığında teğet doğru pozitif eğime, ikinci defa ulaştığında ise negatif eğime sahip olur. Bu eğri bir otonom sistemin yörüngesi olamaz.

Example

$$\left\{ \frac{dx}{dt} = -y,\ \frac{dy}{dt} = x;\ x(0) = 1,\ y(0) = 0 \right\}$$

sisteminin yörüngesini bulalım. Sistemden, $dy/dx = -x/y$ olup, çözümü $x^2 + y^2 = c$ dir. Başlangıç koşullarını kullanırsak $c = 1$ buluruz. Böylece sistemin yörüngesi $x^2 + y^2 = 1$ çemberidir.

Eğer bir yörünge bir kritik noktadan başlamıyorsa, asla bir kritik noktaya ulaşamaz, fakat düzgün bir noktada başlayıp, kritik noktaya asimptotik olarak yaklaşabilir.

Example

$$\left\{ \frac{dx}{dt} = -x, \; \frac{dy}{dt} = -y \right\}$$

sisteminin kritik noktası $(0,0)$ dır ve

$$\{x \equiv y \equiv 0, -\infty < t < \infty\}$$

çözümüne karşılık gelir. Bir başka çözüm

$$\left\{x(t) = e^{-t} = y(t), \; -\infty < t < \infty\right\}$$

olup, bu çözüm de $x, y \geq 0$ bölgesinde $y = x$ yörüngesini verir. $\lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0$ olduğundan, bu yörüngenin noktaları $(0,0)$ kritik noktasına asimptotik olarak yaklaşırlar.

Yarışma Modeli

Farklı türlerin aynı yiyecek kaynağını paylaştığı lojistik durumu iki tür için gözönüne alalım. Türlerin nüfusunu P_1 ve P_2 ile gösterirsek, lojistik model olarak

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1}{dt} = r_1 P_1 (1 - \frac{P_1}{K_1}) \\ \\ \dfrac{dP_2}{dt} = r_2 P_2 (1 - \frac{P_2}{K_2}) \end{cases}$$

sistemini yazabiliriz. Bu denklemler birbirlerinden bağımsız olup asimptotik olarak $P_1 \to K_1$ ve $P_2 \to K_2$ dir. Eğer P_1 nüfusu K_1 den ve P_2 nüfusu da K_2 den çok küçük ise bu durumda çevrede her iki tür için de yeterince yiyecek kaynağı var olup, nüfuslar r_1 ve r_2 oranında üstel olarak büyürler.

Eğer türler yarış halindelerse, bir türün nüfusunun büyümesi, diğer türün yiyecek kaynaklarını azaltır. Bu nedenle modeli türlerin birbirlerine etkisini de göz önüne alarak

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1}{dt} = r_1 P_1 \left(1 - \dfrac{P_1 + \alpha P_2}{K_1}\right) \\ \dfrac{dP_2}{dt} = r_2 P_2 \left(1 - \dfrac{\beta P_1 + P_2}{K_2}\right) \end{cases} \tag{31}$$

şeklinde yenileyebiliriz. Burada α ve β boyutsuz parametreler olup, bir türün diğer türün kaynağını kullanmasını modellemektedirler. Örneğin iki tür de aynı kaynaktan besleniyorlarsa ve örneğin birinci tür diğerinin iki katı yiyecek tüketiyorsa, bu durumda $\alpha = 1$ ve $\beta = 2$ olur.

Eğer tüketimin eşit olduğunu varsayarsak, model

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1}{dt} = r_1 P_1 \left(1 - \dfrac{P_1 + P_2}{K_1}\right) \\ \dfrac{dP_2}{dt} = r_2 P_2 \left(1 - \dfrac{P_1 + P_2}{K_2}\right) \end{cases} \tag{32}$$

şeklini alır. Genelliği bozmaksızın $K_1 > K_2$ kabul edersek, denge nüfusları $(P_1, P_2) = (0, 0)$, $(P_1, P_2) = (K_1, 0)$ ve $(P_1, P_2) = (0, K_2)$ olur.

Sistemin kararlılık analizi için;

$$g(P_1, P_2) = r_1 P_1 \left(1 - \frac{P_1 + P_2}{K_1}\right) \qquad f(P_1, P_2) = r_2 P_2 \left(1 - \frac{P_1 + P_2}{K_2}\right)$$

olup, $(P_{1e}, P_{2e}) = (K_1, 0)$ için

$$a = \frac{\partial g(P_{1e}, P_{2e})}{\partial P_1} = -r_1, \quad b = \frac{\partial g(P_{1e}, P_{2e})}{\partial P_2} = -r_1,$$

$$c = \frac{\partial g(P_{1e}, P_{2e})}{\partial P_1} = 0, \quad d = \frac{\partial g(P_{1e}, P_{2e})}{\partial P_1} = r_2 (1 - K_1 / K_2)$$

ve böylece

$$\begin{aligned} p &= a + d = -r_1 + r_2 (1 - K_1 / K_2) < 0, \\ q &= -r_1 r_2 (1 - K_1 / K_2) > 0, \\ \Delta &= p^2 - 4q = (r_1 + r_2 (1 - K_1 / K_2))^2 > 0 \end{aligned}$$

olup, $(K_1, 0)$ noktası **kararlıdır**. Benzer işlemle $(0, K_2)$ nin **kararsız** olduğu gösterilebilir.

Kararlılık analizini daha basit şekilde aşağıdaki gibi de yapabiliriz: $(P_1, P_2) = (K_1, \varepsilon)$ alalım. $K_1 > K_2$ kabul ettiğimiz için (32) den $P_2' < 0$ olup, bunun anlamı P_2 nin yokolmasıdır. O halde $(K_1, 0)$ noktası kararlıdır. Şimdi $(P_1, P_2) = (\varepsilon, K_2)$ alalım. Yine (32) den bu kez $P_1' > 0$ olup, P_1 nüfusu artar. O halde $(0, K_2)$ kararsız bir denge noktasıdır.
Böylece, aynı çevreyi payşaşan ve aynı oranda kaynak tüketen türler aynı anda varolamazlar ve daha büyük taşıma kapasitesine sahip olan tür diğer türün yokolmasına neden olur. Bu durum **tamamlayıcı dışlama** veya büyük taşıma kapasiteli tür kazandığı için $K-$**ayıklanması** olarak adlandırılır. Aslında bazı α ve β değerleri için (31) modelinin, iki türün birlikte varolmasını sağlayacak şekilde denge çözümlerine sahip olduğu, benzer kararlılık analizi ile gösterilebilir. İki türün birlikte varolması için bir yeter koşul $K_2 < K_1/\alpha$ ve $K_1 < K_2/\beta$ olmasıdır.