dir.

Örnek 1. $u = x^2y^3z$ ve $x = t^2$, $y = t$, $z = cost$ olduğuna göre $\frac{du}{dt}$ türevini bulunuz.

Çözüm.

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

ve

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3z, \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2z, \frac{\partial f}{\partial z} = x^2y^3, \frac{dx}{dt} = 2t, \frac{dy}{dt} = 1, \frac{dz}{dt} = -sint\right]$$

olup buradan

$$\frac{du}{dt} = 4t^4cost + 3t^6cost - t^5sint$$

elde edilir.

Kapalı Olarak Tanımlanan Fonksiyonların Türevi

Tanım 1. $f : x \to f(x)$ veya $y = f(x)$ biçiminde tanımlanan bir f fonksiyonuna bir açık fonksiyon, $F(x, y) = 0$ biçimindeki bir bağıntıyla tanımlanan fonksiyona da kapalı fonksiyon denir.

$F(x, y, z) = 0$ bağıntısı bir $z = f(x, y)$ fonksiyonu tanımlamış olsun. F_x ve F_y kısmi türevleri sürekli ve $F_z \neq 0$ olsun. Zincir kuralından

$$\frac{\partial F}{\partial x}.\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

yazılabilir. $\frac{dx}{dx} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ olacağından

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

bulunur. Buradan

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

bağıntısı elde edilir. Benzer şekilde y değişkenine göre türev alarak,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

olduğu gösterilebilir.

Örnek 1. $z^3 + xyz + xy^2 - 1 = 0$ bağıntısıyla kapalı biçimde tanımlanan $z = f(x, y)$ fonksiyonunun $(1, 2, 1)$ noktasındaki kısmi türevlerini hesaplayınız.

Çözüm.

$$F = z^3 + xyz + xy^2 - 1,$$

$$F_x = yz + y^2, F_y = xz + 2xy, F_z = 3z^2 + xy$$

olup buradan

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{yz + y^2}{3z^2 + xy} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,2,1)} = -\frac{6}{5}$$

ve

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{xz + 2xy}{3z^2 + xy} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,2,1)} = -\frac{1}{1} = -1$$

bulunur.