

BÖLÜM 8: ÜÇ KATLI İNTEGRALLER

8.1 Üç katlı integrallerin tanımı

G bölgesi xyz -uzayında bir bölge ve $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. G üzerinde f 'nin üç katlı integrali

$$I = \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz$$

ile verilir.

Şimdi böyle bir integralin nasıl hesaplanacağını görelim. G bölgesi alttan $z = g(x, y)$ üstten $z = h(x, y)$ yüzeyleri ile yandan da bir silindir ile sınırlanmış olsun. G 'nin xy -düzlemine dik izdüşümü B olmak üzere,

$$I = \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iint_B \left(\int_{z=g(x,y)}^{z=h(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

biçimindedir.

Örnek: Alttan $z = 3$ düzlemi, üstten $z = x^2 + y^2 + 4$ paraboloidi ve yandan $x^2 + y^2 = 1$ silindiri ile sınırlı bölge G olsun. G bölgesi üzerinde

$$\iiint_G xyz \, dx dy dz$$

üç katlı integralini hesaplayınız.

G 'nin xOy -düzlemine dik izdüşümü $B : x^2 + y^2 \leq 1$ daresi olarak bulunur. O halde

$$\begin{aligned} \iiint_G xyz \, dx dy dz &= \iint_B \left(\int_{z=3}^{z=x^2+y^2+4} xyz \, dz \right) dx dy \\ &= \iint_B xy \frac{1}{2} ((x^2 + y^2 + 4)^2 - 9) \, dx dy \end{aligned}$$

yazılır. B bölgesi dairesel bir bölge olduğundan kutupsal koordinatlara geçerse; $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $J = r$ olmak üzere

$$B : 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ elde edilir.}$$

Dolayısıyla

$$\iiint_G xyz \, dx dy dz = \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 r \cos \varphi r \sin \varphi ((r^2 + 4)^2 + 9) r \, dr d\varphi = 0$$

bulunur.

Üç katlı integrallerin özellikleri

$\iiint_G f(x, y, z) dV$ ve $\iiint_G h(x, y, z) dV$ integralleri mevcut olsun.

O halde:

1. $\alpha \in \mathbb{R} \quad \iiint_G \alpha f \, dV = \alpha \iiint_G f \, dV$

2. $\iiint_G (f + h) \, dV = \iiint_G f \, dV + \iiint_G h \, dV$

3. G üzerinde $f \geq 0$ ise $\iiint_G f \, dV \geq 0$.

4. G üzerinde $f \geq h$ ise $\iiint_G f \, dV \geq 0 \geq \iiint_G h \, dV \geq 0$.

5. $G = G_1 \cup G_2$ (G_1 ve G_2 bitişik kümeler)

$$\iiint_G f \, dV = \iiint_{G_1} f \, dV + \iiint_{G_2} f \, dV.$$