

BÖLÜM 9: EĞRİSEL İNTEGRALLER

İntegrasyon bölgesi bir eğri parçası olan integrallerdir. Bu bölümde önce skaler alanların daha sonra vektör alanların eğrisel integralini hesaplayacağız.

9.1 Skaler Alanların Eğrisel İntegrali

$D \subset \mathbb{R}^3$ olmak üzere $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $u = f(x, y, z)$ sürekli bir fonksiyon olsun.

$C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $a \leq t \leq b$ eğrisi D bölgesinde düzgün eğri olsun. O halde f fonksiyonu C 'nin grafiği üzerinde süreklidir.

$$\begin{aligned} I &= \int_C f(x, y, z) dl \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \|r'(t)\| dt \end{aligned}$$

integraline f fonksiyonunun C eğrisi üzerindeki eğrisel integrali denir.

Örnek 1: C eğrisi $O(0, 0, 0)$ noktasını $P(5, 3, 4)$ noktasına birleştiren doğru parçası olduğuna göre

$$\int_C (x + 2y + 3z) dl$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: İki noktası verilen doğru parçasının parametrik denklemi

$$C : \vec{r}(t) = 5t\vec{i} + 3t\vec{j} + 4t\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= 5\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k} \\ \|\vec{r}'(t)\| &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\int_C (x + 2y + 3z) dl = 5\sqrt{2} \int_0^1 (5t + 6t + 12) dt = \frac{115\sqrt{2}}{2}$$

9.2 Vektör Alanların Eğrisel İntegrali

$F(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ vektör alanı $C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $a \leq t \leq b$ düzgün eğriyi içeren bölgede tanımlı olsun.

Tanım 9.2.1 C düzgün bir eğri, F 'de bu eğri üzerinde tanımlı bir vektör alanı olsun. T , eğrinin $(x(t), y(t), z(t))$ noktasına eğri ile aynı yönlü birim teğet vektör olsun. O halde

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot dr &= \int_C F(x(t), y(t), z(t)) \frac{dr}{\|dr\|} \|r'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \left[f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{dr}{dt} \right] dt\end{aligned}$$

integraline F vektör alanının C eğrisi üzerindeki integrali denir.

Örnek 2: C eğrisi $y = x^2$ parabolünün $(0, 0)$ noktasını $(1, 1)$ noktasma birleştiren parçası olduğuna göre C eğrisi üzerinden

$$\int_C (x^2 - 2xy) dx + (2xy + y^2) dy$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: $C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$, $0 \leq t \leq 1$