AKT203 FİNANSAL MATEMATİK

BÖLÜM 3
ANÜİTELER

Anüitenin Döneminin Bulunması

$S = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ ya da $A = R.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ eşitliklerinden logaritma yardımıyla *n* bulunur. Bulunan bu *n* dönem sayısı tam sayı olmayabilir, bu durumda **tam ödemeler** ve **son ödeme** kavramları yardımıyla ödeme planı oluşturulurken aşağıdaki iki yöntemden biri kullanılır:

1. Son ödemeye bir fark eklemek,
2. Son tam ödemeden 1 dönem sonra, bir tam ödemenin miktarından küçük olan bir ödeme daha yapmak. Bazı durumlarda bu son küçük ödemeyi yapmaya gerek kalmayabilir.

Uyarı! Aksi belirtilmedikçe 2. yöntem kullanılacaktır.

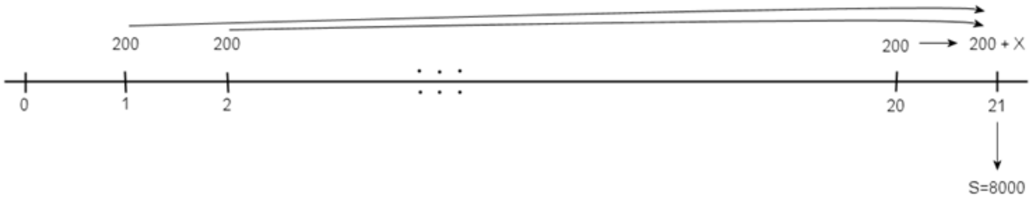
Anüitenin Döneminin Bulunması

Örnek 2.10. *Yarı-yıllık 200 TL'lik ödemeler ile 8000 TL'lik bir fon oluşturulmak istenmektedir, paranın değeri $j_2 = \%12$'dir. Tam ödemelerin sayısını ve son ödemeyi iki yöntem ile de bulunuz.*

$S = 8000,\ R = 200,\ i = \frac{0,12}{2} = 0,06$

$200\,\frac{(1+0,06)^n - 1}{0,06} = 8000 \Rightarrow (1,06)^n = 3,4 \Rightarrow n = \frac{\log 3,4}{\log 1,06} = 21,00220291$

<u>1. yöntem:</u>



$\Rightarrow 200.\frac{(1+0,06)^{21} - 1}{0,06} + X = 8000 \Rightarrow 7998,55 + X = 8000 \Rightarrow X = 1,45$ TL.

21 tam ödeme, 21. son ödeme 201,45 TL.

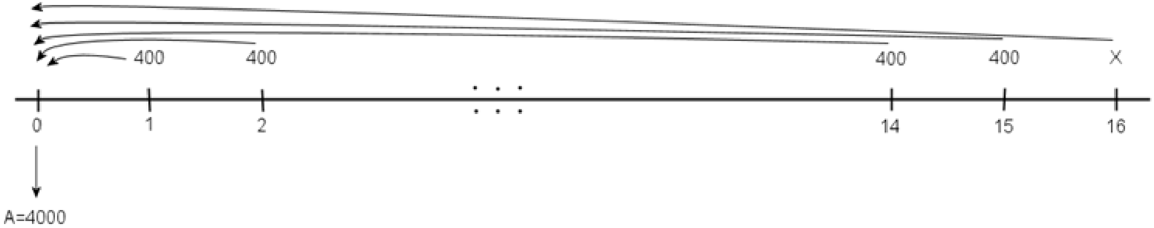
Anüitenin Döneminin Bulunması

Örnek 2.11. *4000 TL'lik borç j_2 = %12'den yarı-yıllık 400 TL'lik ödemeler ile geri ödenecektir. Tam ödemelerin sayısını ve son ödemeyi bulunuz.*

$A = 4000,\ R = 400,\ i = \frac{0,012}{2} = 0,06$

$400\frac{1-(1+0,06)^{-n}}{0,06} = 4000 \Longrightarrow (1,06)^{-n} = 0,4$

$\Longrightarrow -n.\log 1,06 = \log 0,4 \Longrightarrow n = -\frac{\log 0,4}{\log 1,06} = 15,72520854$



$4000 = 400\frac{1-(1+0,06)^{-15}}{0,06} + X.(1+0,06)^{-16}$

$\Longrightarrow X.(1,06)^{-16} = 115,10 \Longrightarrow X = 292,39$ TL

$\boxed{\text{15 tam ödeme ve 16. dönem son küçük ödeme 292,39 TL}}$

Anüitenin Faiz Oranının Bulunması

$i = \frac{j_m}{m}$ ya da j_m oranını bulmak için lineer yaklaşım (interpolasyon) kullanılarak yaklaşık bir oran elde edilir.

1. Eğer $s_{\overline{n}|i} = k$ denkleminden i bulunmak isteniyorsa başlangıç değeri olarak $i_0 = \frac{(\frac{k}{n})^2 - 1}{k}$ alınır.

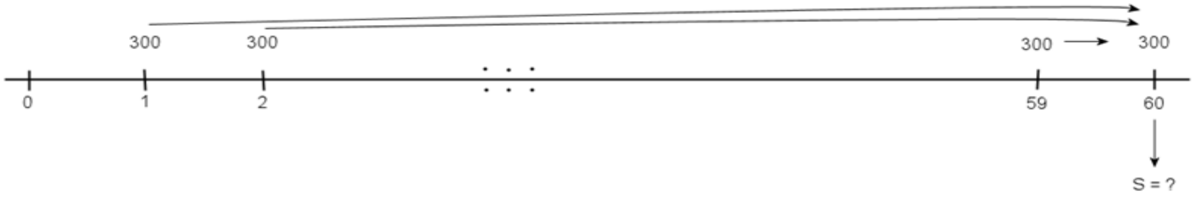
2. Eğer $a_{\overline{n}|i} = k$ denkleminden i bulunmak isteniyorsa başlangıç değeri olarak $i_0 = \frac{1 - (\frac{k}{n})^2}{k}$ alınır.

Genel Anüiteler

Ödeme aralığı ile faiz aralığının çakışmadığı anüitelerdir. Genel anüiteler basit anüitelere dönüştürülerek hesaplanırlar.

Örnek 2.13. *5 yıl boyunca her ayın sonunda 300 TL'lik ödemelerin* $j_4 = 0,06$ *oranından toplam değeri ne olur?*

Ödeme aralığı 1 ay ancak faiz periyodu 3 aydır. Dolayısıyla bu bir genel anüitedir. Bu durumda bu anüiteyi basit anüiteye çevirmek için verilen j_4 oranına denk olan j_{12} oranı bulunup işlem yapılır.



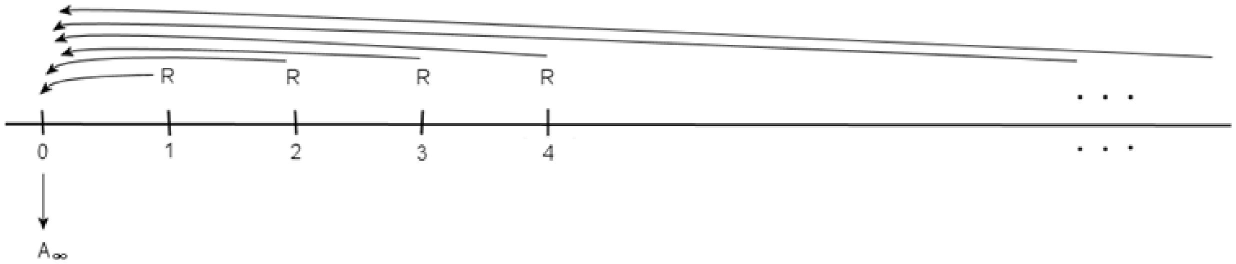
Bileşik faizdeki denk oranların bulunmasında kullandığımız yöntem yardımıyla $i = \frac{j_{12}}{12}$ olmak üzere $(1 + i)^{12} = (1 + \frac{0,06}{4})^4 \Longrightarrow i = 0,004975209$ bulunur.

$$\Longrightarrow S = 300 \cdot \frac{(1+0,004975209)^{60} - 1}{0,004975209} = 20915,01 \text{ TL}$$

Daimi Gelir

Belli bir tarihte başlayan ve sonsuza kadar devam eden ödemelerin oluşturduğu anüitelerdir. Bazı yatırımlar anaparayı muhafaza edip sadece faizini kullanırlar. Örneğin bir hayırseverin sonsuza dek her yıl 5000 TL'lik bir burs verebilmek için her yıl 5000 TL faiz getirecek bir bağış ya da vakıf gibi bağış fonları ile yaşamlarını sürdüren kurumların fonları ya da geri çağrılabilir olmayan hisse senetleri üzerindeki kar payları daimi gelir örnekleridir. Pratikte bu ödemler sonsuza kadar sürmez ancak matematiksel olarak sonsuza dek sürdüğü kabul edilebilir. Daimi gelirin toplam değerini bulmak mümkün değildir, ancak şimdiki değerini tespit edebiliriz.

Daimi Gelir



$$A_\infty = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + \ldots = R(1+i)^{-1}[1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots]$$

$$\Longrightarrow A_\infty = R(1+i)^{-1} \cdot \frac{1}{1-(1+i)^{-1}} = R \cdot \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{R}{i} \Longrightarrow \boxed{A_\infty = \frac{R}{i}}$$

Örnek 2.14. *Her ay 50 TL ödenen daimi gelirin şimdiki değerini a) j_2 = %9 ve b) j_{12} = %12 oranlarına göre hesaplayınız.*

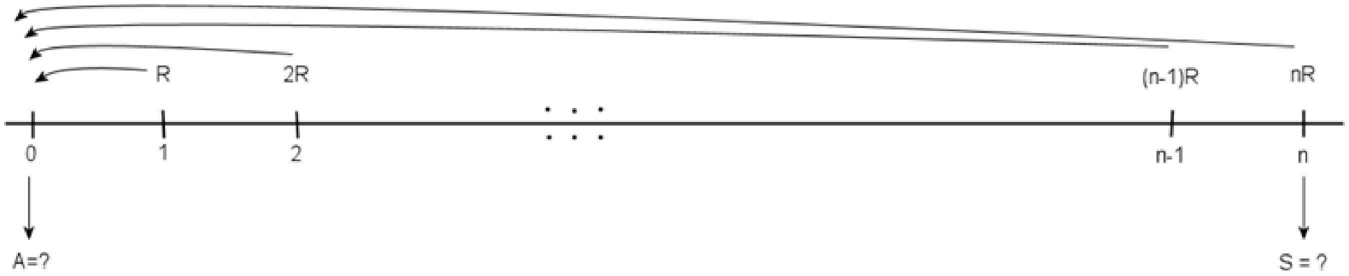
a) $A_\infty = \frac{R}{i} = \frac{50}{\frac{0{,}09}{2}} = 6666{,}67$ TL

b) $A_\infty = \frac{R}{i} = \frac{50}{\frac{0{,}12}{12}} = 5000$ TL.

Değişik Ödemeli Anüiteler

Anüite ödemeleri üzerinde belli bir artma ya da azalma koşulu olan anüitelerdir. Örneğin bir sonraki ödemesi önceki ödemenin %10 fazlası olan ya da 2 katı olan vs.

Örnek 2.15. *Dönem sonunda $R, 2R, 3R, \ldots, nR$ ödemelerinin yapıldığı ve dönem başına faiz oranının i olduğu anüitenin iskontolu ve toplam değerini bulunuz.*



$$A = R(1+i)^{-1} + 2R(1+i)^{-2} + \ldots + (n-1)R(1+i)^{-(n-1)} + nR(1+i)^{-n} \qquad (1)$$

Değişik Ödemeli Anüiteler

(1) eşitliğinin iki tarafı $(1 + i)$ ile çarpalırsa

$$(1 + i)A = R + 2R(1 + i)^{-1} + \ldots + (n - 1)R(1 + i)^{-(n-2)} + nR(1 + i)^{-(n-1)} \qquad (2)$$

(2) eşitliğinden (1) eşitliği taraf tarafa çıkartılırsa

$iA = R + R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + \ldots + R(1+i)^{-(n-1)} - nR(1+i)^{-n}$ bulunur. Bu durumda

$$\Longrightarrow iA = R\,\frac{(1+i)^{-n}-1}{(1+i)^{-1}-1} - nR(1+i)^{-n} = R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{1-\frac{1}{1+i}} - nR(1+i)^{-n}$$

$$\Longrightarrow iA = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.(1+i) - nR(1+i)^{-n} = R[(1+i)a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-1}]$$

$\Longrightarrow A = \frac{R}{i}[(1+i)a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}]$ ve $S = \frac{R}{i}[(1+i)a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}](1+i)^{n}$ bulunur.