AKT102 İSTATİSTİK

# BÖLÜM 3

## OLASILIK

§ 3.1

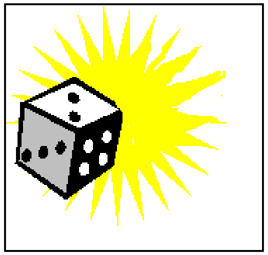
# Temel Olasılık Kavramları

# Olasılık Deneyleri

**Olasılık deneyi**, belirli sonuçların (sayım, ölçüm veya yanıt) elde edildiği bir eylemdir.

**Örnek:**

Bir zar atılması sonucu gelen sayıyı gözlemlemek bir olasılık deneyidir.



Bir olasılık deneyinde tek bir denemenin neticesi sonuçtur.

Bir deney için olası tüm sonuçların kümesi **örneklem uzayıdır.**

**Örnek:**

Bir zar atıldığında örneklem uzayı 6 sonuçtan oluşur.

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

# Olaylar

**Olay,** bir veya daha fazla sonuçtan oluşur ve örneklem uzayının bir alt kümesidir.

Olaylar büyük harflerle temsil edilir..

**Örnek:**
Bir zar atılsın. A olayı çift sayı gelmesi olsun.

**Basit olay**, tek bir sonuçtan oluşan olaydır.

**Örnek:**
Bir zar atılsın ve A olayı çift sayı gelmesi durumlarını temsil etsin.Bu basit olay değildir çünkü A olayının sonuçları $\{2, 4, 6\}$ dır yani tek bir sonuçtan oluşmaz.

# Klasik Olasılık

**Klasik (veya teorik) olasılık,** bir örneklem uzayındaki her bir sonucun eşit olasılıkla ortaya çıkması durumlarında kullanılır. E olayı için klasik olasılık,

$$P(E) = \frac{\text{Olaydaki sonuç sayısı}}{\text{Örneklem uzayındaki sonuçların sayısı}}.$$

**Örnek:**

Bir zar atılsın ve A olayı 5 gelme durumu ise A olayının olasılığını bulun.

A olayının tek bir sonucu var: {5}

$$P(A) = \frac{1}{6} \approx 0.167$$

"A olayının olasılığı."

# Ampirik Olasılık

**Ampirik (veya istatistiksel) olasılık,** olasılık deneylerinden elde edilen gözlemlere dayanır. E olayının ampirik frekansı, E olayının göreceli frekansıdır.

$$P(E) = \frac{\textit{E olayının frekansı}}{\text{Toplam frekans}}$$

$$= \frac{f}{n}$$

**Örnek:**

Bir seyahat acentesi yaptığı her 50 rezervasyonda 12'sinin gemi seyahati olacağını belirler.

Yapacağı bir sonraki rezervasyonun gemi seyahati olma olasılığı nedir?

$$P(gemi) = \frac{12}{50} = 0.24$$

# Büyük Sayılar Kanunu

Bir deney tekrar tekrar tekrarlanırken, bir olayın ampirik olasılığı olayın teorik (gerçek) olasılığına yaklaşır.

**Örnek:**


Sally 20 kez yazı tura atsın ve 3 tura sonucuna ulaşsın. Bu durumda ampirik olasılık 3/20 olur. Bu, 1/2 olan teorik olasılığı temsil etmemektedir. Sally'nin bozuk parayı atma sayısı arttıkça, büyük sayılar yasası, ampirik olasılığın teorik olasılığa daha da yaklaşacağını gösterir.

# Frekans Dağılımlarının Olasılıkları

**Örnek:**
Aşağıdaki sıklık dağılımı, bir istatistik sınıfındaki 30 öğrencinin yaşını temsil eder. Bir öğrencinin 26 ila 33 yaşları arasında olma olasılığı nedir?

| yaş | sıklık $f$ |
|---|---|
| 18 – 25 | 13 |
| 26 – 33 | 8 |
| 34 – 41 | 4 |
| 42 – 49 | 3 |
| 50 – 57 | 2 |

$$\sum f = 30$$

$$P(26\text{-}33) = \frac{8}{30}$$

$$\approx 0.267$$

# Öznel Olasılık

**Öznel olasılık,** sezgiden, bilgiye dayalı tahminlerden ve tahminlerden kaynaklanır.

**Örnek:**
Bir iş analisti, greve giden belirli bir birliğin olasılığının 0.15 olduğunu tahmin ediyor.

**Olasılık Aralığı Kuralı**

E olayının olasılığı 0 ile 1 arasındadır. Yani

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

**İmkansız olay**

**0.5**

**Eşit olasılık**

**Kesin olay**

# Tümleyen Olaylar

E olayının tümleyeni, E olayına dahil edilmeyen örneklem uzayındaki tüm sonuçların kümesidir ($E'$ ile gösterilir).

$$P(E) + P(E') = 1 \qquad P(E) = 1 - P(E') \qquad P(E') = 1 - P(E)$$

**Örnek:**
Bir sepetin içinde 5 kırmızı pul, 4 mavi pul ve 6 beyaz pul olsun. Rasgele seçilen bir pulun mavi olmaması olasılığını bulun.

$$P(\text{mavi pul seçilmesi}) = \frac{4}{15} \approx 0.267$$

$$P(\textit{mavi olmayan pul seçilmesi}) = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15} \approx 0.733$$

§ 3.2

# Koşullu Olasılık ve Çarpma Kuralı

# Koşullu Olasılık

Koşullu olasılık, başka bir olayın gerçekleşmiş olması koşuluyla, meydana gelen bir olayın olasılığıdır.

$P(B \mid A) \longrightarrow$ "A verildiğinde B nin olması olasılığı

**Örnek:**

Bir sepetin içinde 5 kırmızı pul, 4 mavi pul ve 6 beyaz pul vardır. İki pul rasgele seçilir. İlk pulun mavi olduğu göz önüne alındığında, ikinci pulun kırmızı olma olasılığını bulun. (İlk pulun yerine konmadığını varsayalım.)

İlk pul seçildiğinden ve yerine konmadığından, yalnızca 14 pul kalır.

$$P(\text{seçilenin kırmızı olması} \mid \text{ilk pul mavi}) = \frac{5}{14} \approx 0.357$$

# Koşullu Olasılık

**Örnek:**
100 üniversite öğrencisine anket uygulanmış ve haftada kaç saat ders çalıştıkları sorulmuştur. Sonuçlar aşağıdaki tablodadır. Bir öğrencinin, bir erkek olması şartıyla 10 saatten fazla ders çalışması olasılığını bulun.

| | <5 | 5 -10 | >10 | Toplam |
|---|---|---|---|---|
| Erkek | 11 | 22 | 16 | 49 |
| Kadın | 13 | 24 | 14 | 51 |
| Toplam | 24 | 46 | 30 | 100 |

Örneklem uzayı 49 erkek öğrenciden oluşmaktadır. Bunlardan 16'sı haftada 10 saatten fazla çalışarak geçiriyor.

$$P(10 \text{ saatten fazla çalışma} \mid \text{erkek}) = \frac{16}{49} \approx 0.327$$

# Bağımsız Olaylar

Olaylardan birinin gerçekleşmesi diğer olayın gerçekleşme olasılığını etkilemezse, iki olay bağımsızdır. İki olay A ve B bağımsız ise;

$$P(B \mid A) = P(B) \quad \text{veya} \quad P(A \mid B) = P(A).$$

Olaylar bağımsız değillerse bağımlı olaylardır.

**Örnek**:
Olayların bağımsız mı yoksa bağımlı mı olduğuna karar verin.

Standart bir kart destesinden bir karo (A) ♦ seçilsin ve desteye geri konulsun ve desteden bir maça (B) ♠ seçilsin. Bu durumda:

$$P(B \mid A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \quad \text{ve} \quad P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

A'nın meydana gelmesi B'nin olasılığını etkilemez, bu nedenle olaylar bağımsızdır.

# Çarpma Kuralı

A ve B iki olayın gerçekleşmesi olasılığı:

$$P(A \text{ ve } B) = P(A) \cdot P(B \mid A).$$

Eğer $A$ ve $B$ bağımsız ise, bu kural basitçe:

$$P(A \text{ ve } B) = P(A) \cdot P(B).$$

**Örnek**:
İki kart yerine konmadan desteden seçilsin. Bir karo seçme ve ardından bir maça seçme olasılığını bulun.

Kartlar yerine konmadan çekildiği için bağımlı olaylardır.

$$P(\text{karo ve maça}) = P(\text{karo}) \cdot P(\text{maça} \mid \text{karo}).$$

$$= \frac{13}{52} \cdot \frac{13}{51} = \frac{169}{2652} \approx 0.064$$

# Çarpma Kuralı

**Örnek**:
Bir zar ve iki para atılsın. Zarın 5 , paraların yazı gelmesi olasılığını bulun

$$P(\text{zarın 5 gelmesi}) = \frac{1}{6}.$$

Zar 5 gelse de gelmese de paranın yazı gelmesi olasılığı $P(\text{yazı}) = \frac{1}{2}$, bu nedenle olaylar birbirinden bağımsızdır.

$$P(5 \text{ ve } Y \, ve \, Y) = P(5) \cdot P(Y) \cdot P(Y)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

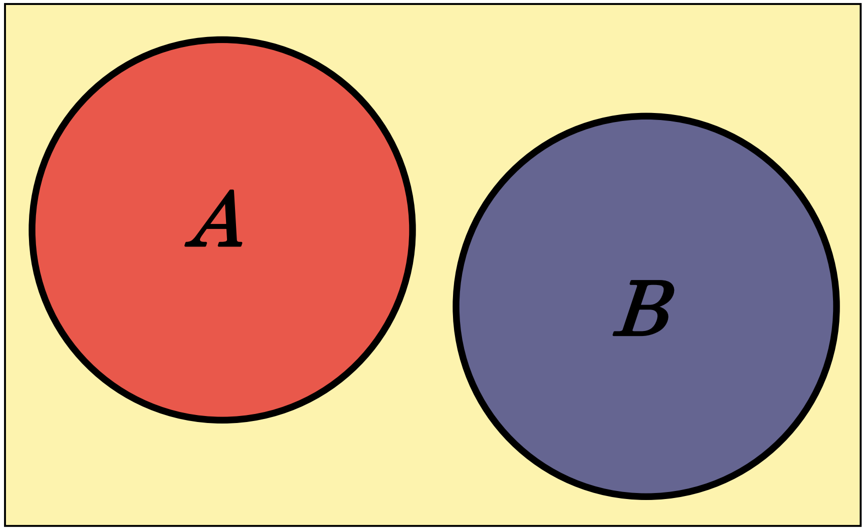
$$= \frac{1}{24} \approx 0.042$$

§ 3.3

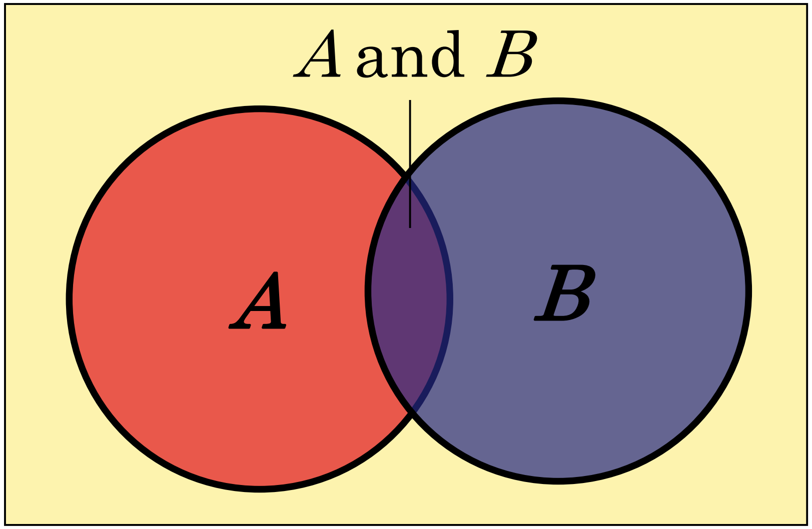
# Toplama Kuralı

# Ayrık Olaylar

İki olay, A ve B, aynı anda gerçekleşemezlerse ayrık olaylardır.




$A$ ve $B$ ayrık olaylar



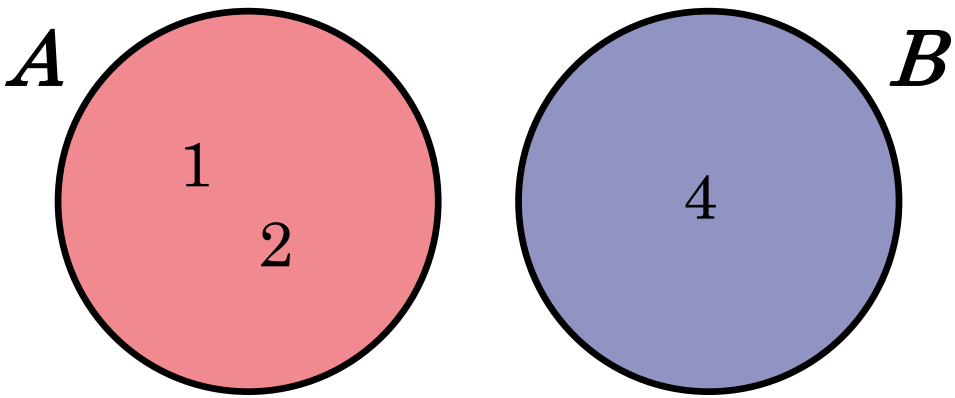

$A$ *ve* $B$ ayrık olay değil.

# Ayrık Olaylar

**Örnek**:
İki olayın ayrık olup olmadığını bulun.

*A olayı,*: Zar atıldığında 3 ten daha az gelmesi.

*B olayı*: Zar atıldığında 4 gelmesi.



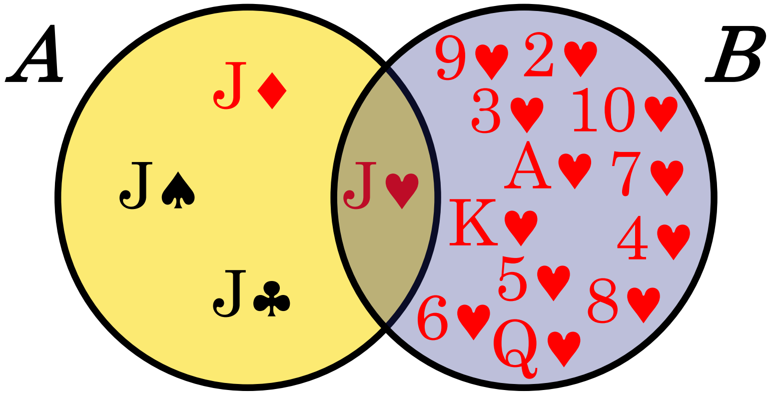

Bu olaylar aynı anda olamazlar bu nedenle ayrık olaylardır.

# Ayrık Olaylar

**Örnek**:
İki olayın ayrık olup olmadığını bulun.

*A olayı*: Kart destesinden J gelmesi .

*B olayı*: Kart destesinden kupa gelmesi .




Kart aynı anda hem bir J hem de bir kupa olabileceğinden, ayrık olaylar değildir.

# Toplama Kuralı

$A$ *ya da* $B$ olayının meydana gelme olasılığı;

$$\boldsymbol{P(A \text{ ya da B}) = P(A) + P(\text{B}) - P(A \text{ ve } B)}.$$

Eğer $A$ ve $B$ olayları ayrık olaylarsa bu kural basitçe

$$P(A \text{ ya da B}) = P(A) + P(\text{B}).$$

**Örnek**:

Zar atıldığında 3 ten az ya da 4 gelme olasılığı ne olur?

Olaylar ayrık olaylardır.

$$P(3 \text{ ten az ya da 4 gelme})$$

$$= P(3 \text{ ten az}) + P(4)$$

$$= \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0.5$$

# Toplama Kuralı

**Örnek**:
Bir kart destesinden rasgele bir kart seçilsin. Kartın bir J veya kupa olma olasılığını bulun.

Olaylar birbirinden ayrık değil çünkü kupa J her iki olayda da meydana gelir.

$$P(\text{ J ya da kupa})$$

$$= P(\text{J}) + P(\text{kupa}) - P(\text{kupa J})$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52}$$

$$= \frac{16}{52} \approx 0.308$$

# Toplama Kuralı

**Örnek:**
100 üniversite öğrencisine anket uygulanmış ve haftada kaç saat ders çalıştıkları sorulmuştur. Sonuçlar aşağıdaki tablodadır. Bir öğrencinin 5 ile10 saat veya 10 saatten fazla çalışması olasılığını bulun.

| | <5 | 5 - 10 | >10 | Toplam |
|---|---|---|---|---|
| Erkek | 11 | 22 | 16 | 49 |
| Kadın | 13 | 24 | 14 | 51 |
| Toplam | 24 | 46 | 30 | 100 |

Olaylar ayrık olaylardır.

$$P(5 \text{ ile } 10 \text{ saat ya da } 10 \text{ saatten fazla}) = P(5 \text{ to} 10) + P(10)$$

$$= \frac{46}{100} + \frac{30}{100} = \frac{76}{100} = 0.76$$

§ 3.4

# Sayma İlkeleri

# Temel Sayma İlkeleri

Birinci olay m şekilde ve ikinci olay n şekilde meydana geliyorsa, iki olayın sırayla gerçekleşebileceği yol sayısı m * n'dir. Bu kural, meydana gelen herhangi bir sayıda olay için genişletilebilir.

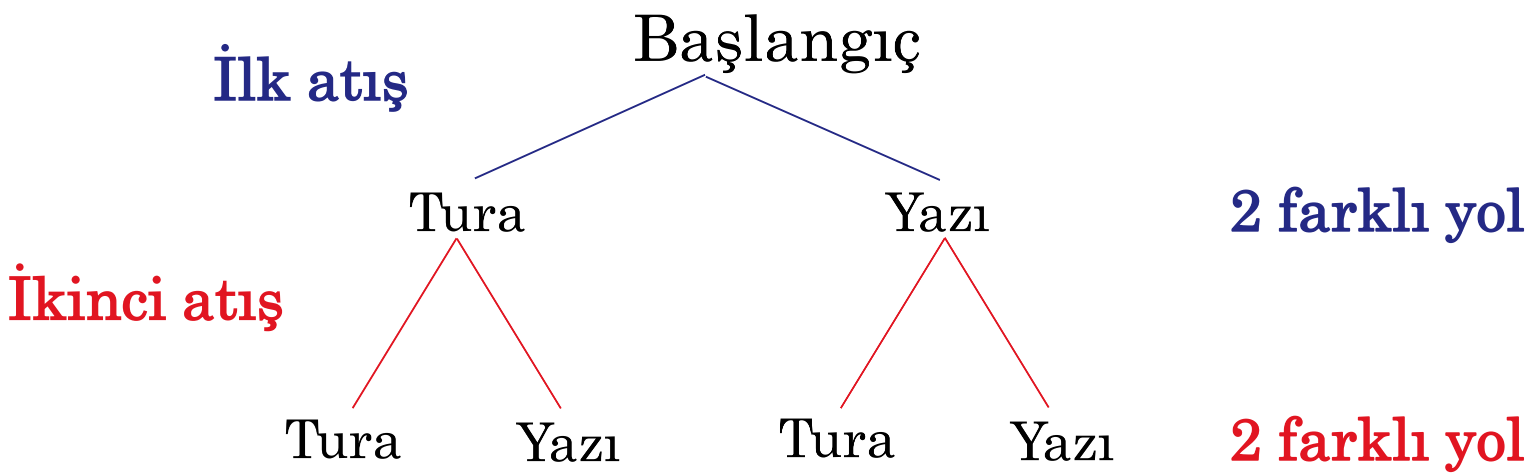
**Örnek**:
Bir yemek bir ana yemek, bir garnitür ve bir tatlıdan oluşur. 4 ana yemek, 2 garnitür ve 5 tatlı mevcutsa kaç farklı yemek seçilebilir?

| ana yemek sayısı | | Garnitür sayısı | | tatlı sayısı | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **4** | × | **2** | × | **5** | = | **40** |

40 farklı yemek seçilebilir.

# Temel Sayma İlkeleri

**Örnek:**
Bir para iki kez atılsın. Örneklem uzayını listeleyin.




$\mathbf{2} \times \mathbf{2} = 4$ farklı sonuç: {HH, HT, TH, TT}.

# Temel Sayma İlkeleri

**Örnek:**
Bir evin güvenlik sistemine erişim kodu 5 haneden oluşur. Her basamak 0 - 9 arasında olabilir.
a.) Her hane tekrar edilen sayı varsa
b.) Her rakam yalnızca bir kez kullanılırsa ve tekrarlanmazsa kaç farklı kod yazılabilir?

a.) H er basamak tekrar edilebildiğinden, 5 basamaktan her biri için 10 seçenek vardır.

$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100{,}000$ farklı kod

b.) Her hane tekrar edilemediğinden, ilk hane için 10 seçenek, ikinci hane için 9 seçenek, üçüncü için 8, dördüncü için 7 ve beşinci için 6 seçenek vardır.

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30{,}240$ farklı kod

# Permütasyon

Bir permütasyon, nesnelerin sıralanmış bir düzenidir.
n farklı nesnelerin farklı permütasyonlarının sayısı n! dir.

"*n* faktöriyel"

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

**Örnek**:
Bir ankette 7 soru varsa, olası tüm soru düzenlemelerini karşılamak için kaç farklı ankete ihtiyaç vardır?

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040 \text{ anket}$$

# n elemanın r tane Permütasyonu

n elemanın r tane permütasyon sayısı;

$$ {}_{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}. $$

Grup sayısı ($n$)

Gruptan seçim sayısı ($r$)

**Örnek:**

8 listeden 5 kitap okumak için gereklidir. Ne kadar farklı sıralama yapabilirsiniz?

$$ {}_{n}P_{r} = {}_{8}P_{5} = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{\cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}} = 6720 \text{ yol} $$

# Ayırt Edici Permütasyonlar

$n_1$ 'in bir tür, $n_2$ 'nin başka bir tür olduğu n nesnelerinin ayırt edilebilir permütasyonu:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdots n_k!}, \; n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k = n.$$

**Örnek:**
Jessie ön bahçesine10 tane bitki dikmek istiyor.3 adet gül , 4 nergis ve 3 adet zambak var. Bitkiler kaç farklı şekilde düzenlenebilir?

$$\frac{10!}{3!4!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3!4!3!}$$

$$= 4{,}200 \text{ farklı yolla sıralanabilir}$$

# n Elemanın r tane Kombinasyonu

Kombinasyon, sıralamanın önemli olmadığında n gruptan r nesnenin seçilmesidir. n gruptan seçilen r nesnesi kombinasyonlarının sayısı;

$$ {}_{n}C_{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}. $$

grup sayı

Gruptan seçilen sayı

**Örnek:**

8 tane kitap listesinden 5 kitap okumak için sıralama önemli değilse kaç farklı şekilde yapabilirsiniz?

$$ {}_{8}C_{5} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{3!5!} $$

$$ = 56 \text{ kombinasyon} $$

# Sayma İlkesinin Uygulaması

**Örnek**:
Piyangoda, büyük ödülü kazanmak için 44 üzerinden 6 sayıyı (herhangi bir sıra ile) doğru seçmelisiniz.

a.) 44 sayıdan 6 sayı kaç şekilde seçilebilir?

b.)Piyango bileti alırsanız, büyük ödülü kazanma olasılığınız nedir?

a.) $_{44}C_6 = \dfrac{44!}{6!38!} = 7{,}059{,}052$ kombinasyon

b.) Sadece bir kazanan bilet olduğundan;

$$P(\text{win}) = \frac{1}{7059052} \approx 0.00000014$$