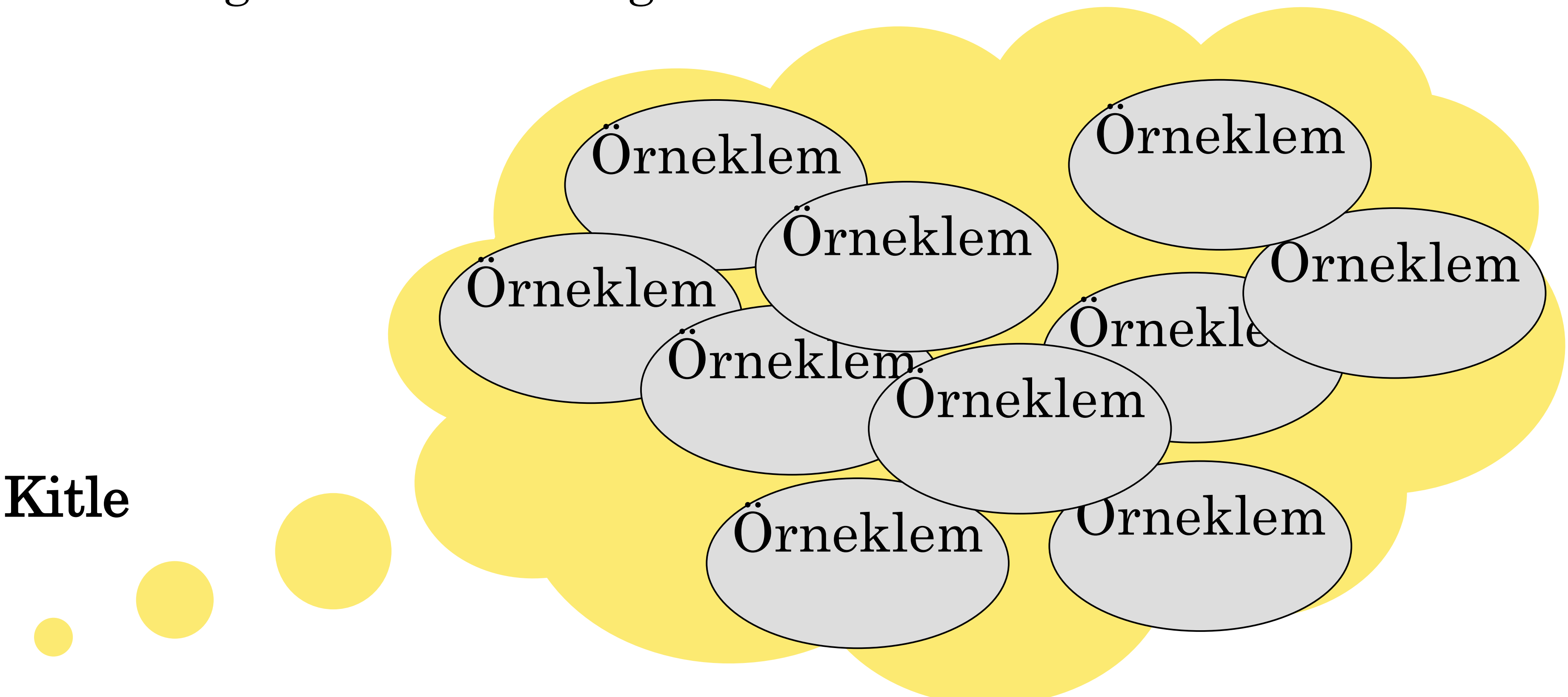
AKT102 İSTATİSTİK

BÖLÜM 6

ÖRNEKLEM DAĞILIMLARI VE MERKEZİ LİMİT TEOREMİ

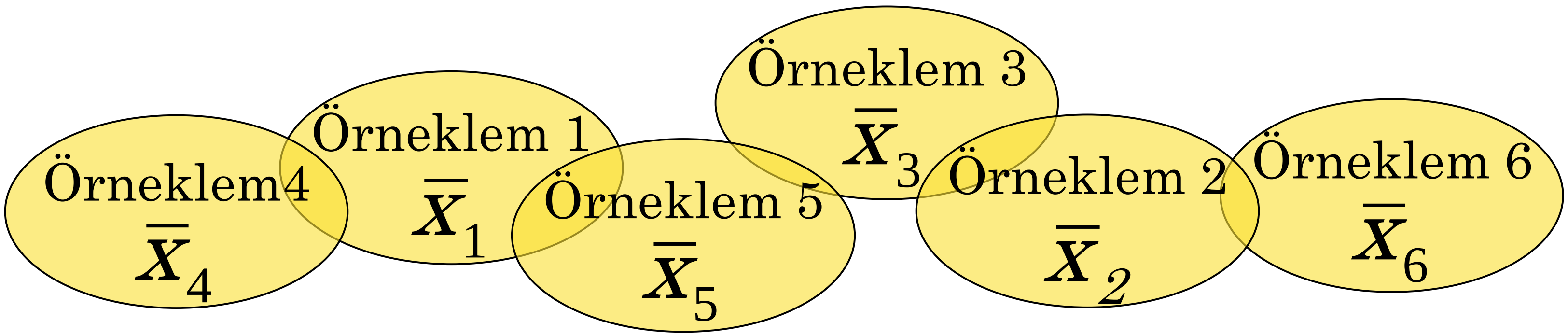
Örneklem Dağılımları

Bir örneklem dağılımı, n boyutundaki örneklemler bir kitleden tekrar tekrar alındığında oluşan bir örneklem istatistiğinin olasılık dağılımıdır.



Örneklem Dağılımları

Eğer örneklem istatistiği, örneklem ortalaması ise, dağılım, örneklem ortalamasının örneklem dağılımıdır..



Örneklem dağılımı örneklem ortalamalarının

$\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3, \overline{X}_4, \overline{X}_5, \overline{X}_6$ değerlerinden oluşur.

Örneklem Dağılımlarının Özellikleri

Örneklem Dağılımı Örneklem Ortalamasının Özellikleri

1. Örneklem ortalamasının ortalaması, $\mu_{\bar{x}}$ kitle ortalamasına eşittir.

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

2. Örneklem ortalamasının standart sapması, $\sigma_{\bar{x}}$, kitle standart sapmasının σ, kök n e bölümüne eşittir.

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Örneklem ortalamasının örneklem dağılımının standart sapması, ortalamanın standart hatası olarak adlandırılır.

Örneklem Ortalamasının Örneklem Dağılımı

Örnek:
Popülasyon değerleri {5, 10, 15, 20} kâğıtlara yazılmakta ve şapka içine atılmaktadır. Yerine konularak iki kağıt rasgele seçilir.
a.Kitlenin ortalaması,varyansı ve standart sapması nedir?

<u>Popülasyon</u>
5
10
15
20

$$\mu = 12.5$$

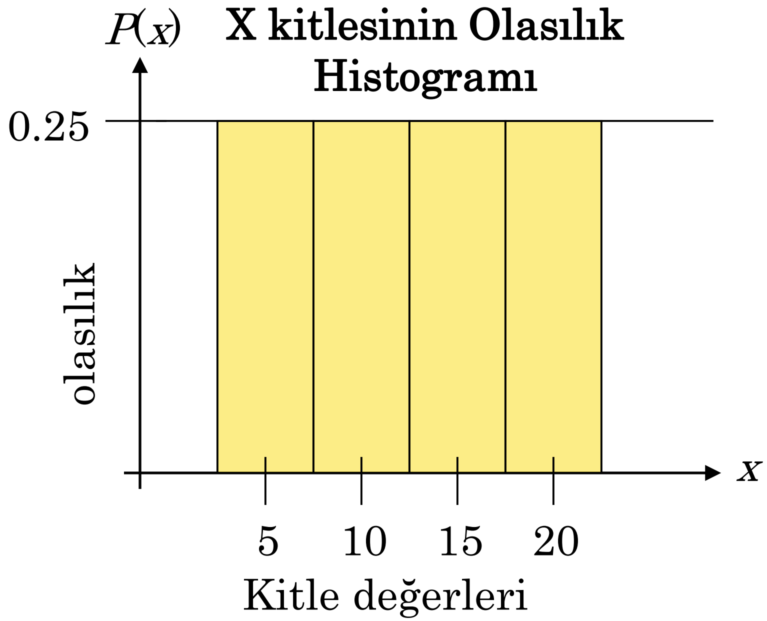
$$\sigma = 5.59$$

$$\sigma^2 = 31.25$$

Örneklem Ortalamasının Örneklem Dağılımı

Örneğin devamı:

b. Kitle değerleri için histogram grafiğini çizin.



Bu uniform (tekdüze) dağılım, tüm değerlerin seçilme olasılığının aynı olduğunu göstermektedir.

Örneklem Ortalamasının Örneklem Dağılımı

Örneğin devamı:

.

c. Tüm n = 2 örneklemlerini listeleyin ve her birinin ortalamasını hesaplayınız..

Sample	Sample mean, $\bar{x}$
5, 5	5
5, 10	7.5
5, 15	10
5, 20	12.5
10, 5	7.5
10, 10	10
10, 15	12.5
10, 20	15

Sample	Sample mean, $\bar{x}$
15, 5	10
15, 10	12.5
15, 15	15
15, 20	17.5
20, 5	12.5
20, 10	15
20, 15	17.5
20, 20	20

Bu ortalamalar, örneklem ortalamalarının örneklem dağılımını oluşturur.

Örneklem Ortalamasının Örneklem Dağılımı

Örneğin devamı:

d. Örneklem ortalamasının olasılık dağılımını oluşturun.

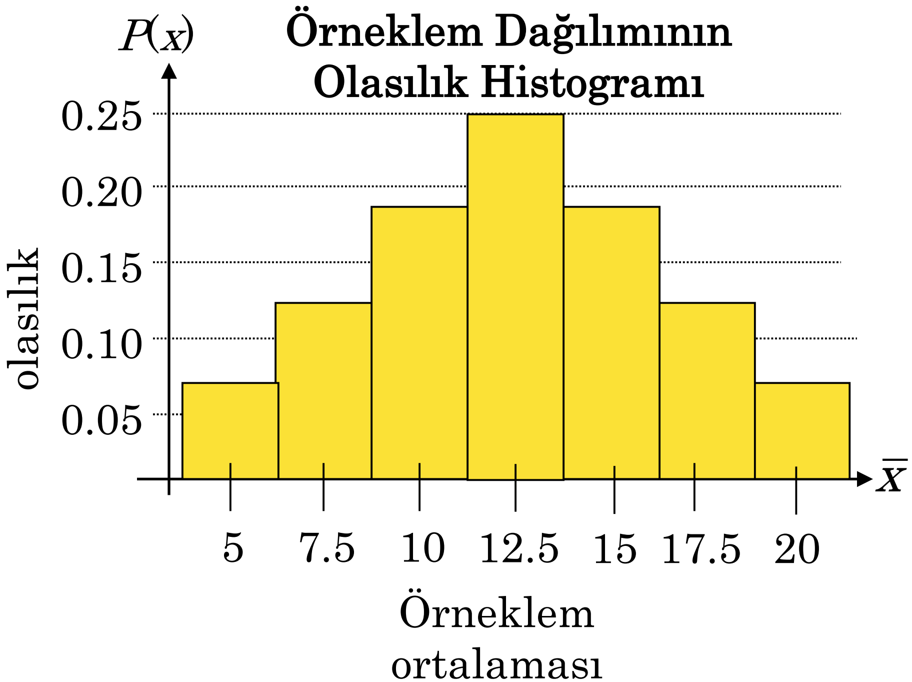
$\bar{x}$	f	Probability
5	1	0.0625
7.5	2	0.1250
10	3	0.1875
12.5	4	0.2500
15	3	0.1875
17.5	2	0.1250
20	1	0.0625

Örneklem Ortalamaların Olasılık Dağılımı

Örneklem Ortalamasının Örneklem Dağılımı

Örneğin devamı:

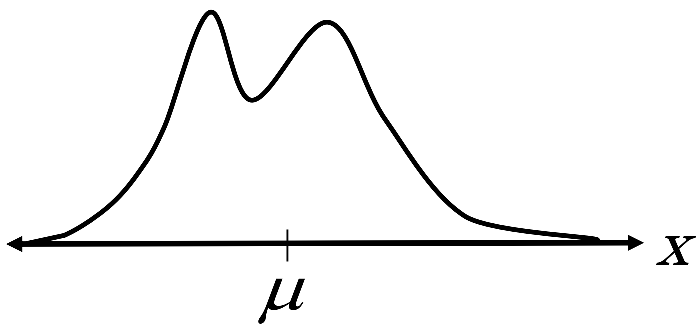
e. Örneklem dağılımı için olasılık histogramının grafiğini çizin.

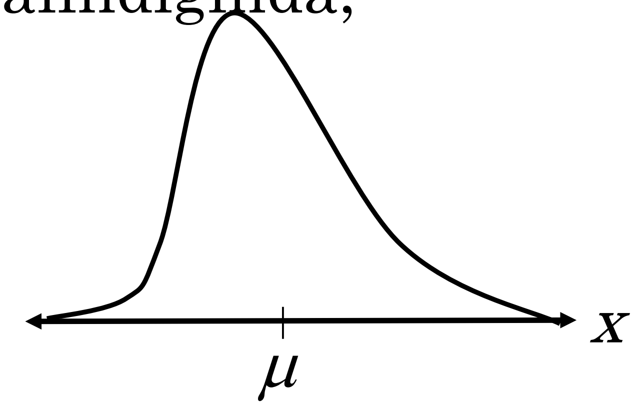


Grafiğin şekli simetrik ve çan şeklindedir. Normal dağılıma yaklaşır..

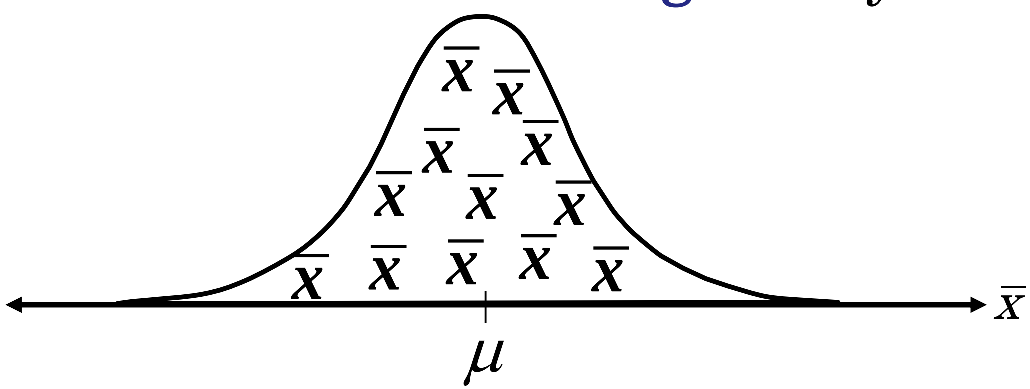
Merkezi Limit Teoremi

Ortalama = μ ve standart sapma = σ olan herhangi bir dağılım türüne sahip bir popülasyondan n ≥ 30 büyüklüğünde bir örneklem alındığında,



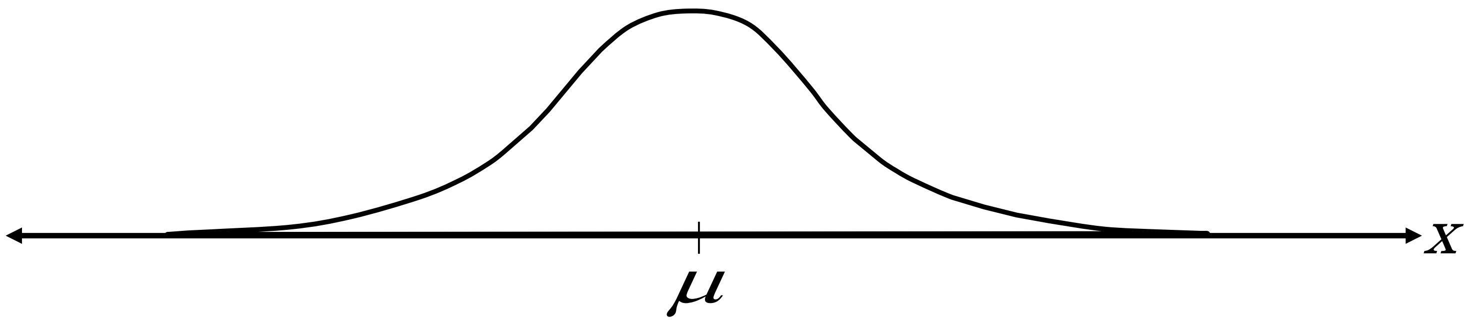


Örneklem ortalaması **normal dağılıma** yakınsar.

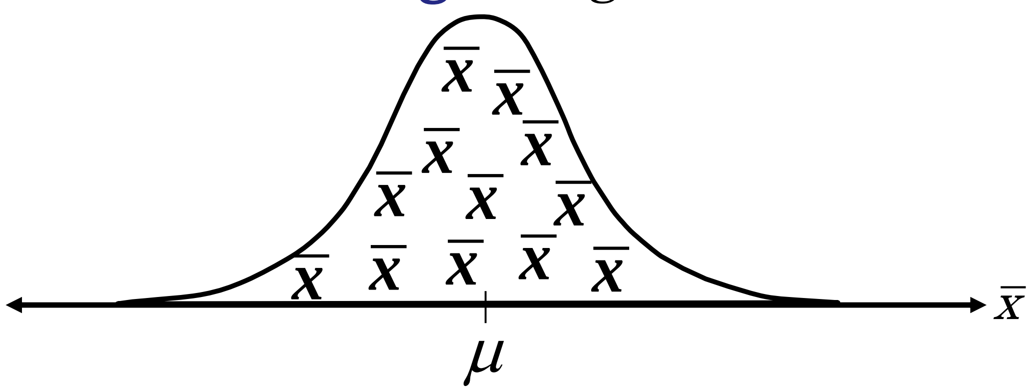


Merkezi Limit Teoremi

Eğer kitlenin kendisi ortalama = μ *ve* standart sapma= σ *ile* ***normal dağılım*** gösteriyorsa



Örneklem ortalaması herhangi bir n örneklem büyüklüğü ile **normal dağılım** gösterir.



Merkezi Limit Teoremi

Her iki durumda da, örneklem ortalamasının örneklem dağılımı, kitle ortalamasına eşit bir ortalamaya sahiptir.

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

Örneklem ortalamasının ortalaması

Örneklem ortalamasının örneklem dağılımı, n'nin karekökü ile bölünen kitle standart sapmasına eşit bir standart sapmaya sahiptir.

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Örneklem ortalamasının standart sapması

Ayrıca ortalamanın standart hatası olarak da adlandırılır.

Ortalama ve Standart Hata

Örnek:
Tamamen büyümüş olan manolya çalılıklarının yükseklikleri ortalama 8 ve 0.7 standart sapmaya sahiptir. 38 çalı popülasyondan rasgele seçilir ve her örneklemin ortalaması belirlenir. Örnekleme dağılımının ortalamasının standart hatasını ve ortalamasını bulun.

ortalama

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$
$$= 8$$

Standart sapma (standart hata)

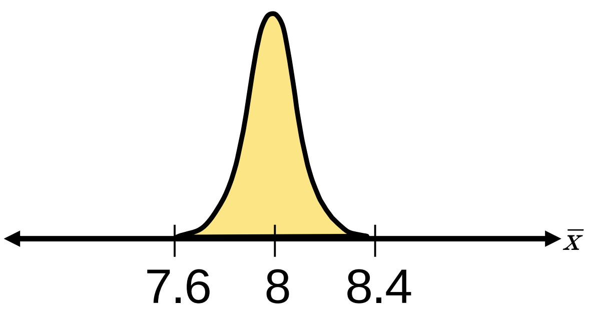
$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$= \frac{0.7}{\sqrt{38}} = 0.11$$

Merkezi Limit Teoreminin Yorumlanması

Örneğin devamı:

Örnekleme dağılımının ortalaması 8 ve örnekleme dağılımının standart hatası 0.11 dir.

Merkezi Limit Teoreminden, örneklem büyüklüğü 30'dan büyük olduğu için örneklem dağılımı normal dağılıma yaklaşılabilir.



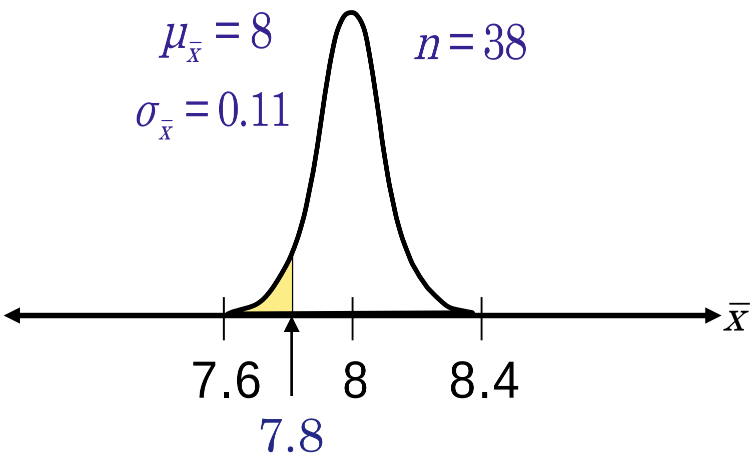
$\mu_{\bar{x}} = 8$ $\sigma_{\bar{x}} = 0.11$

Olasılıkları Bulma

Örneğin devamı:

Örneklem dağılımının ortalaması 8 ve örneklem dağılımının standart hatası 0,11 dir.

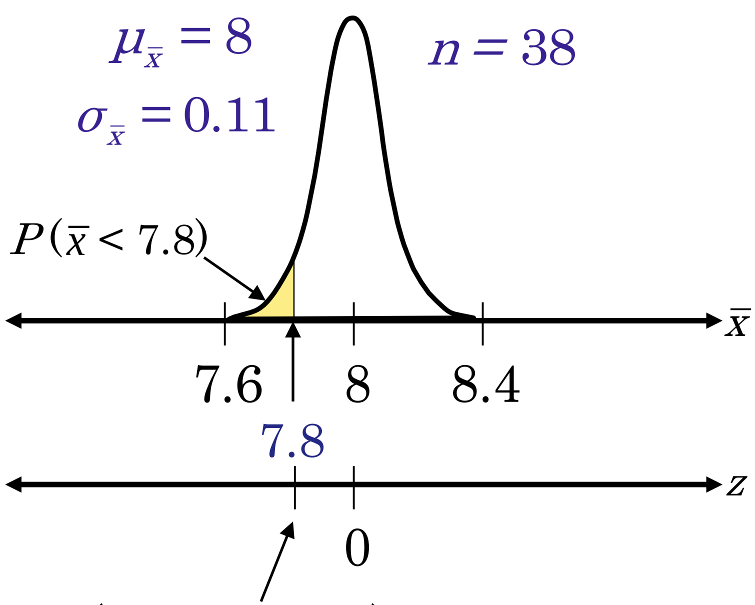
38 çalılığın ortalama yüksekliğinin 7.8 den daha düşük olma olasılığını bulun.



Olasılıkları Bulma

Örneğin devamı:

38 çalılığın ortalama yüksekliğinin 7.8 den daha düşük olma olasılığını bulun.



$$z = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{7.8 - 8}{0.11} = -1.82$$

$$P(\bar{x} < 7.8) = P(z < -1.82) = 0.0344$$

38 çalılığın ortalama yüksekliğinin 7.8 den daha düşük olma olasılığı 0.0344 tür.

Olasılık ve Normal Dağılım

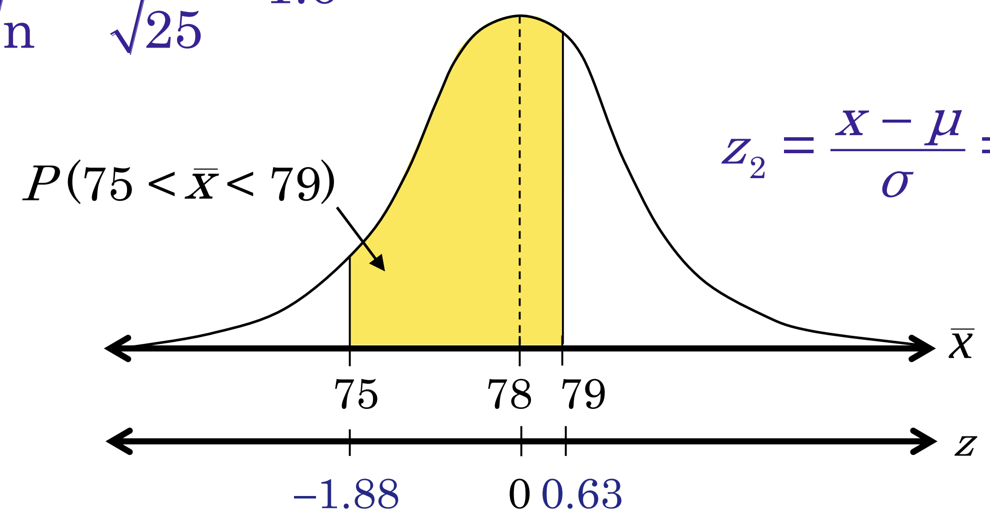
Örnek:
Bir istatistik testinde ortalama 78 standart sapma ise 8 dir. Test puanları normal olarak dağılmışsa, rasgele seçilen 25 öğrencinin ortalama puanının 75 ile 79 arasında olması olasılığını bulun.

$$\mu_{\bar{x}} = 78$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{8}{\sqrt{25}} = 1.6$$

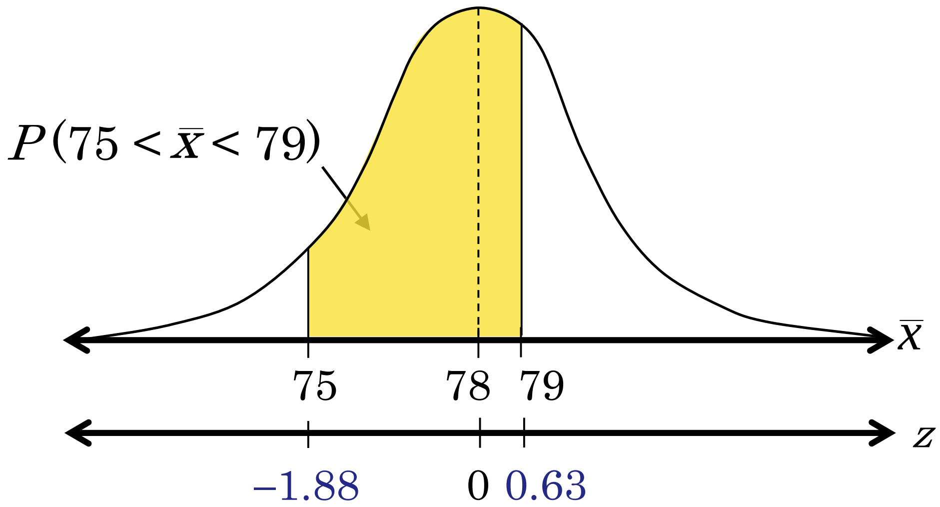
$$z_1 = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{75 - 78}{1.6} = -1.88$$

$$z_2 = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{79 - 78}{1.6} = 0.63$$



Olasılık ve Normal Dağılım

Örneğin devamı:



$$P(75 < \bar{x} < 79) = P(-1.88 < z < 0.63) = P(z < 0.63) - P(z < -1.88)$$

$$= 0.7357 - 0.0301 = 0.7056$$

25 öğrencinin yaklaşık % 70.56'sının ortalama puanları 75 ile 79 arasındadır.

Örnek:

Otomobil tamircisi maaşı için kitle ortalaması $\mu = 34.000\$$ ve standart sapması $\sigma = 2.500\$$ dır. Rasgele seçilen 50tamircinin maaşı için örneklem ortalaması 35.000$ dan fazla olması olasılığını bulun.

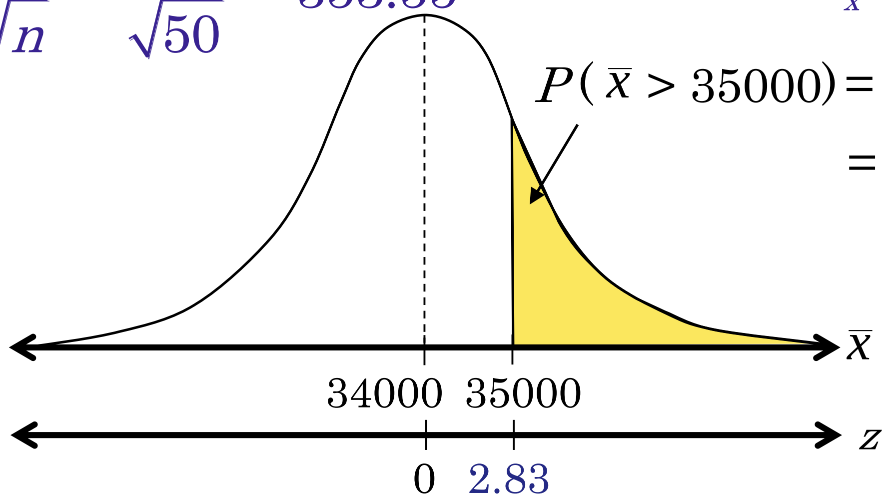
$$\mu_{\bar{x}} = 34000$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2500}{\sqrt{50}} = 353.55$$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{35000 - 34000}{353.55} = 2.83$$

$$P(\bar{x} > 35000) = P(z > 2.83) = 1 - P(z < 2.83)$$

$$= 1 - 0.9977 = 0.0023$$



Rasgele seçilen 50tamircinin maaşı için örneklem ortalaması 35.000$ dan fazla olması olasılığı 0.0023 tür.

Örnek:

Otomobil tamircisi maaşı için kitle ortalaması $\mu = 34.000\$$ ve standart sapması $\sigma = 2.500\$$ dır. Rasgele seçilen 1 tamircinin maaşının 35.000$ dan fazla olması olasılığını bulun.

(Merkezi Limit Teoreminin geçerli olmadığına dikkat edin.)

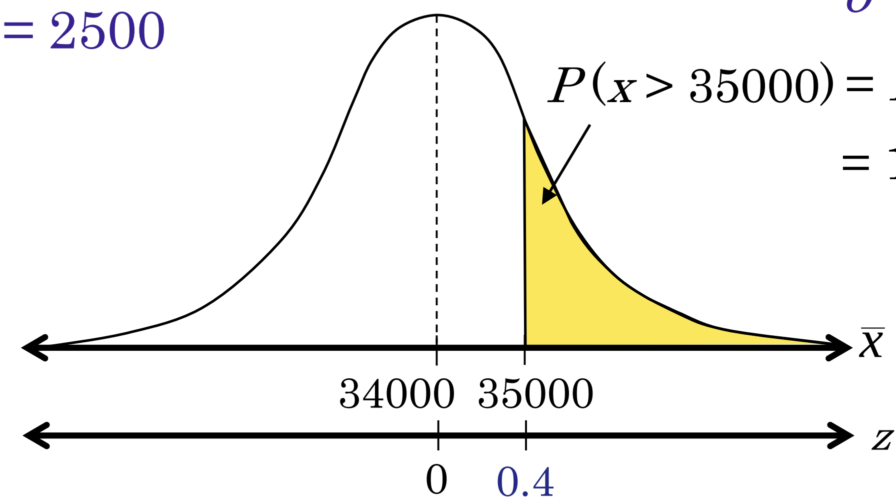
$\mu = 34000$

$\sigma = 2500$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{35000 - 34000}{2500} = 0.4$$

$$P(x > 35000) = P(z > 0.4) = 1 - P(z < 0.4)$$

$$= 1 - 0.6554 = 0.3446$$



Bir tamircinin maaşının 35.000$dan fazla olması olasılığı 0.3446'dır.

Örnek:
Rasgele seçilen bir tamircinin maaşının 35.000 $ dan fazla olması ihtimali 0.3446'dır. 50 tamirciden oluşan bir grupta, yaklaşık olarak 35.000 $ dan fazla maaş alan kaç kişi olurdu?

$$P(x > 35000) = 0.3446$$

Bu aynı zamanda, tamircilerin %34.46'sının 35.000 $ dan fazla maaşa sahip olduğu anlamına gelir.

$$34.46\% \text{ of } 50 = 0.3446 \times 50 = 17.23$$

50 kişilik gruptan 17 tamircinin, maaşının 35.000$ dan fazla olmasını beklersiniz.

Binom Dağılımına Normal Yaklaşım

Normal Yaklaşım

Normal dağılım, olasılık bulmak için binom dağılımını kullanmak pratik olmazsa, binom dağılımını yaklaşık olarak belirlemek için kullanılır..

Binom Dağılımına Normal Yaklaşım

Eğer $np \geq 5$ ve $nq \geq 5$ ise,o zaman binom r.d x ortalaması $\mu = np$ ve standart sapması $\sigma = \sqrt{npq}.$ olan normal dağılıma yakınsar.

Normal Yaklaşım

Örnek:

Aşağıdaki örneklerde normal dağılım yaklaşımı olacak şekilde kullanılıp kullanılmayacağına karar verilmiştir.

1. ABD'deki insanların %36 sının köpeği vardır. Rasgele 25 kişi seçiliyor ve köpekleri olup olmadığı soruluyor

$$np = (25)(0.36) = 9$$
$$nq = (25)(0.64) = 16$$

np ve nq, 5'ten büyük olduğundan, normal dağılım kullanılabilir.

1. ABD'deki insanların %14 ünün kedisi vardır. Rasgele 20 kişi seçiliyor ve kedileri olup olmadığı soruluyor.

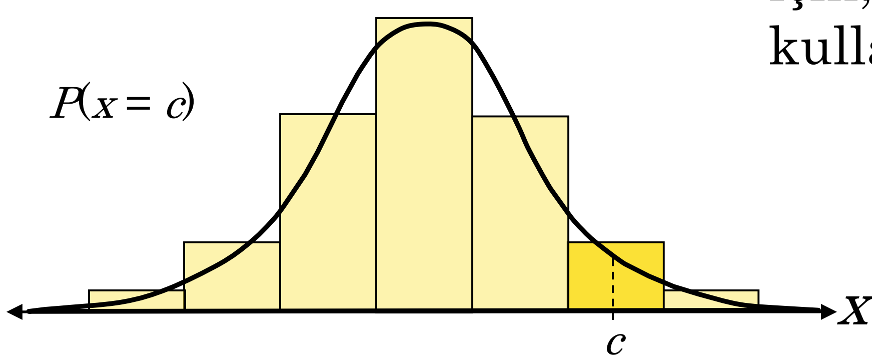
$$np = (20)(0.14) = 2.8$$
$$nq = (20)(0.86) = 17.2$$

np 5'ten büyük olmadığı için normal dağılım yaklaşımı kullanılamaz.

Süreklilik Düzeltmesi

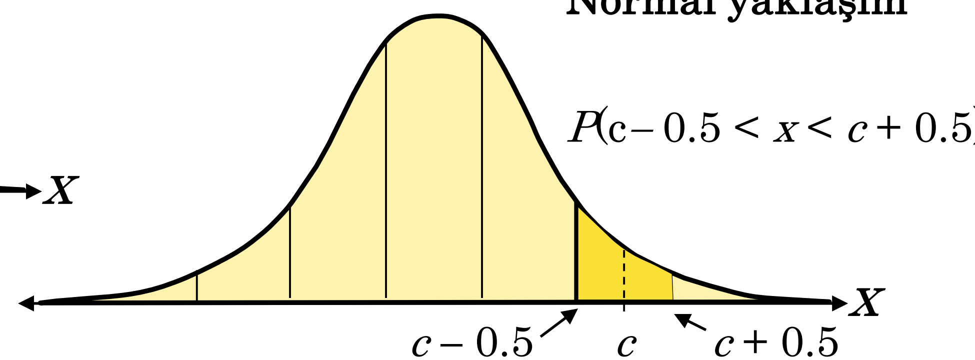
Binom dağılımı kesiklidir ve bir olasılık histogramı ile temsil edilebilir.

Tam binom olasılığı



Tam binom olasılıklarını hesaplamak için, her x değeri için binom formülü kullanılır ve sonuçlar eklenir.

Normal yaklaşım



Binom dağılımına yaklaşmak için sürekli normal dağılım kullanılırken, aralıktaki tüm olası x değerlerini dahil etmek için 0,5 birimi orta noktanın soluna ve sağına hareket ettirin

Buna süreklilik düzeltmesi denir.

Süreklilik Düzeltmesi

Örnek:

Binom aralıklarını normal dağılım aralığına dönüştürmek için süreklilik düzeltmesi kullanın.

1. 125 ile 145 (dahil) arasında başarı olma olasılığı.

   Kesikli orta nokta değerleri 125, 126,…, 145'tir.

   Sürekli aralık 124,5 <x <145,5'tir.

2. Tam 100 başarı olma olasılığı.

   Kesikli orta nokta değeri 100'dür.

   Sürekli aralık 99.5 <x <100,5'dir.

3. En az 67 başarı olma olasılığı.

   Kesikli orta nokta değerleri 67, 68,….

   Sürekli aralık x> 66,5'tir.

Kılavuz

Binom Olasılıklarına Yakınsama için Normal Dağılım Kullanma

Açıklama	*Gösterim*
1. Binom dağılımının geçerli olduğunu doğrulayın.	Specify n, p, and q.
2. Binom değişkeni x'e yaklaşık olarak Normal dağılımı kullanıp kullanmayacağınızı belirleyin.	Is $np \geq 5$? Is $nq \geq 5$?
3. Dağılım için ortalama μ ve standart sapmayı σ bulun.	$\mu = np$ $\sigma = \sqrt{npq}$
4. Uygun süreklilik düzeltmesini uygulayın. İlgili eğriyi normal eğri altında gölgeleyin.	Bitiş noktalarından 0,5 ekleyin ve çıkarın.
5. İlgili z-değerlerini bulun.	$z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$
6. Olasılığı bulun.	Standart Normal dağılım tablosunu kullanın.

Binom Olasılık Yaklaşımı

Örnek:

Bir lisede son sınıf öğrencilerin %31'i üniversiteye gitmeyi planlıyor. Eğer 50 öğrenci rasgele seçilirse, 14'ten az öğrencinin üniversiteye gitmeyi planlama olasılığını bulun.

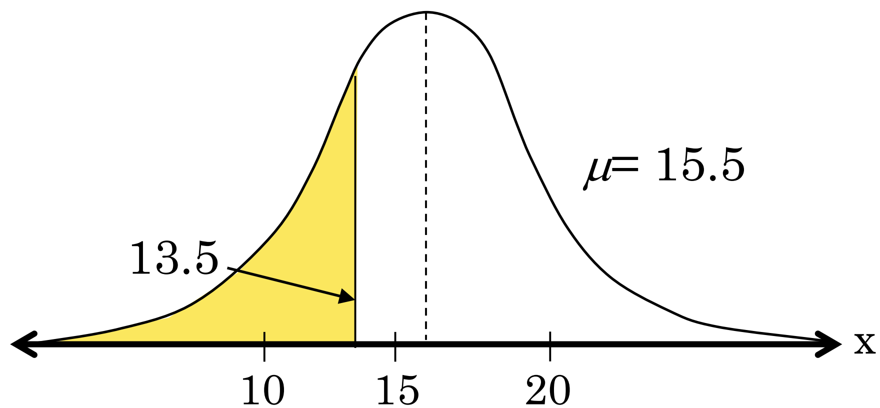
$$\left.\begin{aligned} np &= (50)(0.31) = 15.5 \\ nq &= (50)(0.69) = 34.5 \end{aligned}\right\}$$

X değişkeni yaklaşık olarak $\mu = np = 15.5$ ve $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(50)(0.31)(0.69)} = 3.27.$ ile normal dağılır.

$$P(x < 13.5) = P(z < -0.61)$$
$$= 0.2709$$

Süreklilik düzeltmesi

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{13.5 - 15.5}{3.27} = -0.61$$



14'ten az öğrencinin üniversiteye gitmeyi planlama olasılığı 0.2079 dur.

Binom Olasılık Yaklaşımı

Örnek:

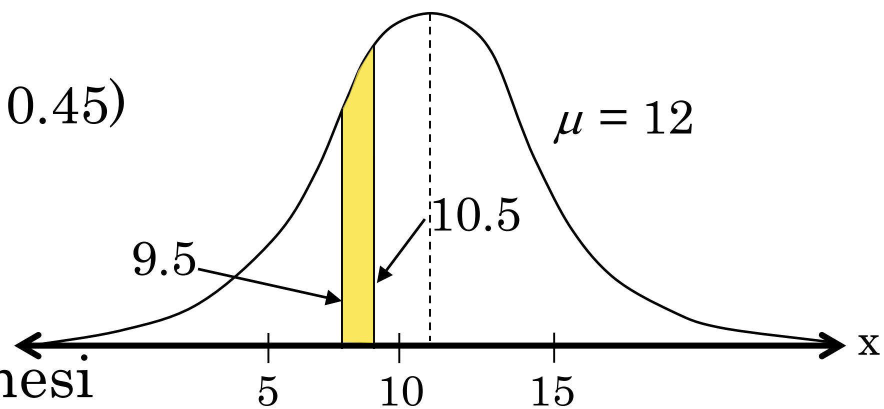
Bir anket, ABD vatandaşlarının yüzde kırk sekizinin bilgisayar sahibi olduğunu bildirdi. 45 vatandaş rasgele seçilir ve bilgisayar sahibi olup olmadığı sorulur. Tam olarak 10 kişinin evet demesi olasılığı nedir?

$$\left.\begin{array}{l} np = (45)(0.48) = 12 \\ nq = (45)(0.52) = 23.4 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \mu = 12 \\ \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(45)(0.48)(0.52)} = 3.35 \end{array}$$

$$P(9.5 < x < 10.5) = P(-0.75 < z - 0.45)$$

$$= 0.0997$$

Süreklilik düzeltmesi



Tam olarak 10 kişinin evet demesi olasılığı 0.0997 dir.