3.6 Logaritma ve Üstel Fonksiyonların Türevi

3.6.1 Logaritma Fonksiyonunun Türevi

$f(x) = \log_a x$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $x > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(\frac{x+h}{x})}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(1+\frac{h}{x})}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}} \\
&= \log_a e^{\frac{1}{x}} \\
&= \frac{1}{x}\log_a e \\
&= \frac{1}{x \ln a}
\end{aligned}$$

olduğundan $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$ olur. Özel olarak $g(x) = \ln x$ doğal logaritma fonksiyonu için $g'(x) = \frac{1}{x}$ olduğu açıktır.

Örnek 135 *Zincir kuralını da dikkate alarak aşağıdaki fonksiyonların türevini hesaplayınız.*

1. $f(x) = \ln(x^3 + 1)$
2. $f(x) = \ln\sqrt{x^2 + 1}$
3. $f(x) = x\ln(\sin x)$
4. $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$
5. $f(x) = \ln|x|$

3.6.2 Üstel Fonksiyonun Türevi

$f(x) = a^x$ üstel fonksiyonunu göz önüne alalım. Bilindiği gibi, bu fonksiyon $f^{-1}(x) = \log_a x$ fonksiyonunun ters fonksiyonudur. Böylce ters fonksiyonun türevi yardımıyla

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{\frac{1}{f(x)\ln a}} = f(x)\ln a = a^x \ln a$$

bulunur. Yine özel olarak $g(x) = e^x$ doğal üstel fonksiyonu için $g'(x) = e^x$ olduğu açıktır.

Örnek 136 *Zincir kuralını da dikkate alarak aşağıdaki fonksiyonların türevini hesaplayınız.*

1. $f(x) = 2^{\cos 5x}$
2. $f(x) = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$
3. $f(x) = e^{3x} \ln x - x$
4. $f(x) = e^{\arctan x}$

3.6.3 Logaritmik Türev Alma

$f(x) = [g(x)]^{h(x)}$ şeklinde bir ifadenin türevini almak için önce her iki yanın logaritması alınıp

$$\ln f(x) = h(x) \ln g(x)$$

ifadesi bulunur. Her iki yanın x göre türevi alınırsa

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = h'(x) \ln g(x) + h(x) \frac{g'(x)}{g(x)}$$

den

$$f'(x) = f(x) \left(h'(x) \ln g(x) + h(x) \frac{g'(x)}{g(x)} \right)$$

bulunur.

Örnek 137 *Aşağıdaki fonksiyonların türevini hesaplayınız.*

1. $f(x) = (1 + x^2)^x$
2. $f(x) = x^{\sin x}$
3. $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$
4. $f(x) = x^{\ln x}$

3.7 Hiperbolik Fonksiyonlar ve Terslerinin Türevi

Bilindiği gibi hiperbolik fonksiyonlar

$$\begin{aligned}
\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \ , \ \cosh x = \\
\tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} \ , \ \coth x = \frac{\cosh x}{\sin x} \\
\sec hx &= \frac{1}{\cosh x} \ , \ \csc hx = \frac{1}{\sinh x}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. Dolayısıyla

$f(x) = \sinh x$ fonksiyonunu türevi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\sinh x \\ &= \frac{d}{dx}(\frac{e^x - e^{-x}}{2}) \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \cosh x \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$$

olduğu görülebilir. Diğer hiperbolik fonksiyonları türevleri ise bölümün türevi yardımıyla hesaplanabilir.

Örnek 138 *Aşağıdaki fonksiyonların türevini hesaplayınız.*

1. $f(x) = \cosh(\ln x)$
2. $f(x) = \ln(\tanh 3x)$

Ters hiperbolik fonksiyonları türevi, ters fonksiyonun türevi yarmıyla bulunabileceği gibi, bu fonksiyonların logaritma fonksiyonu cinsinden yazılan eşitlikleri yardımıyla da türevleri bulunabilir. Burada sadece sinh ve cosh fonksiyonlarının terslerinin türevini vereceğiz. Gerekli olması halinde diğerlerinin türevleri benzer yolla bulunabilir.

$f(x) = \arcsin hx = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ olduğundan

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

olur. Yine $g(x) = \arccos hx = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ olduğundan $x > 1$ için

$$g'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

olur.

3.8 Kapalı Fonksiyonların Türevi

Şimdiye kadar $y = f(x)$ biçiminde belirtilen fonksiyonların türevi için bazı yöntemler geliştirdik. Bu kesimde y bağımlı değişkeninin açıkça x bağımsız değişkeninin bir fonksiyonu olarak belirtilmediği durumlarda türevin nasıl hesaplanacağını araştıracağız. Bu tür fonksiyonlar genel olarak $F(x, y) = 0$ biçiminde gösterilir ve kapalı fonksiyonlar olarak adlandırılır. Böyle bir fonksiyonun türevini bulmak için y yi x in bir fonksiyonu olarak düşünerek $F(x, y) = 0$ ifadesinin her iki yanının x e göre türevi alınır ve y' ifadesi çekilir.

Örnek 139 $5y^2 + \sin y = x^2$ *eşitliğinden* $\frac{dy}{dx}$ *ifadesini hesaplayınız.*

Örnek 140 $7y^4 + x^3 y + x = 4$ *eğrisinin grafiğine* $(4, 0)$ *noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.*

Örnek 141 *Aşağıdaki bağıntılardan* y' *türevini hesaplayınız.*

1. $x^2 + y^2 = 4$
2. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 8$
3. $x = y + \tan y$
4. $e^y - \ln xy = 1$

Örnek 142 $y^2 = x^3(2 - x)$ *eğrisine* $(1, 1)$ *noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.*

Örnek 143 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$ *eğrisine* $(-3\sqrt{3}, 1)$ *noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.*