2.6. Lineer Diferensiyel Denklemler

1. basamaktan lineer diferensiyel denklem

$$y' + p(x)\,y = q(x) \tag{1}$$

formundadır. (1) denklemi

$$[p(x)\,y - q(x)]\,dx + dy = 0$$

şeklinde yazıldığında bir tam denklem değildir, fakat

$$\lambda(x) = e^{\int p(x)dx}$$

formundaki bir integral çarpanına sahiptir. (1) denkleminin her iki tarafı bu $\lambda(x)$ integral çarpanı ile çarpılırsa

$$e^{\int p(x)dx}y' + e^{\int p(x)dx}p(x)\,y = e^{\int p(x)dx}q(x)$$

elde edilir. Buradan

$$\left(e^{\int p(x)dx}y\right)' = q(x)\,e^{\int p(x)dx}$$

olur. Her iki tarafın integrali alınırsa aşağıdaki çözümü verir:

$$\lambda(x)\,y = \int q(x)\,\lambda(x)\,dx + c$$

$$y(x) = \lambda^{-1}(x)\left(\int q(x)\,\lambda(x)\,dx + c\right). \tag{2}$$

Örnek 1.

$$y' + xy = x$$

denklemini çözünüz.

Çözüm.

İntegral çarpanı

$$\lambda(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int xdx} = e^{\frac{x^2}{2}}$$

dir. Denklemin her ik tarafı $e^{\frac{x^2}{2}}$ ile çarpılarak

$$e^{\frac{x^2}{2}}y' + xe^{\frac{x^2}{2}}y = xe^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \left(e^{\frac{x^2}{2}}y\right)' = xe^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \int \left(e^{\frac{x^2}{2}}y\right)' dx = \int xe^{\frac{x^2}{2}}dx$$

$$\Rightarrow ye^{\frac{x^2}{2}} = e^{\frac{x^2}{2}} + c$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(e^{\frac{x^2}{2}} + c\right)$$

$$\Rightarrow y(x) = 1 + ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

elde edilir.

Örnek 2.

$$\begin{cases} xy' + 3y = 2x^5 \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm. Denklem, $p(x) = \frac{3}{x}$ olmak üzere

$$y' + \frac{3}{x}y = 2x^4$$

olarak yazılsın. İntegral çarpanı $\lambda(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = x^3$ dür. Denklemi x^3 ile çarparsak

$$x^3y' + 3x^2y = 2x^7$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^3y\right) = 2x^7$$

bulunur. Böylece, bu denklemde her iki tarafın integralini alırsak

$$\int \frac{d}{dx}\left(x^3y\right)dx = 2\int x^7dx$$
$$\Rightarrow x^3y = \frac{x^8}{4} + c$$
$$\Rightarrow y(x) = \frac{x^5}{4} + \frac{c}{x^3}$$

olur.

$y(2) = 1$ koşulu uygulanırsa

$$y(2) = \frac{32}{4} + \frac{c}{8} = 1 \Rightarrow \frac{c}{8} = -7 \Rightarrow c = -56$$

elde edilir.

O halde $y(2) = 1$ koşulunu sağlayan çözüm

$$y(x) = \frac{x^5}{4} - \frac{56}{x^3}$$

dür.

Örnek 3.

$$\left(1+x^2\right)y' + 4xy = \left(1+x^2\right)^{-2} \quad , \quad y(0) = 1$$

başlangıç değer problemini çözünüz.

İlk olarak, denklemi normal formda tekrar yazalım:

$$y' + \frac{4x}{1+x^2}y = \left(1+x^2\right)^{-3} \quad , \quad p(x) = \frac{4x}{1+x^2}.$$

İntegrasyon çarpanı $\lambda(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{4x}{1+x^2}dx} = e^{2\ln\left(1+x^2\right)} = \left(1+x^2\right)^2$ olduğundan her taraf $\lambda(x)$ ile çarpılarak

$$\begin{aligned} \left(\left(1+x^2\right)^2 y\right)' &= \left(1+x^2\right)^2 \left(1+x^2\right)^{-3} \\ \Rightarrow y\left(1+x^2\right)^2 &= \int \left(1+x^2\right)^{-1} dx = \arctan x + c \\ \Rightarrow y(x) &= \frac{\arctan x + c}{\left(1+x^2\right)^2} \end{aligned}$$

elde edilir. $y(0) = 1$ başlangıç koşulundan

$$y(0) = \frac{0+c}{1} = c = 1 \Rightarrow y(x) = \frac{\arctan x + 1}{\left(1+x^2\right)^2}$$

bulunur.

Örnek 4. $\left(1+x^2\right)dy + (2xy - \tan x)\,dx = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{\tan x}{1+x^2} \qquad \text{(lineer denklem)}$$

denklemi için integral çarpanı

$$\lambda(x) = e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} = e^{\ln\left(1+x^2\right)} = 1+x^2$$

olmak üzere denklem $\lambda(x)$ ile çarpılarak integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \lambda(x)\,y &= \int \frac{\tan x}{1+x^2}\left(1+x^2\right)dx + c \\ \Rightarrow \left(1+x^2\right)y &= -\ln(\cos x) + c \\ \Rightarrow y\left(1+x^2\right) + \ln(\cos x) &= c \end{aligned}$$

elde edilir.

Problemler

Aşağıdaki diferensiyel denklemleri çözünüz.

a) $xy' - y = x^3 e^{-x}$, $x > 0$

b) $y' - y\tan x = \sin x$

c) $y' + y\tan x = 4x^3\cos x$

d) $y' + \frac{1}{x\ln x}y = \frac{1}{\ln x}$