2.8. Riccati Diferensiyel Denklemi

$$y' = P(x) + Q(x)\,y + R(x)\,y^2 \tag{1}$$

formundaki bir diferensiyel denklem Riccati diferensiyel denklemi olarak adlandırılır. $P(x), Q(x), R(x)$ fonksiyonları bir I aralığında süreklidir. Riccati denkleminin bir özel çözümü biliniyorsa (1) denklemi lineer bir denkleme indirgenebilir ve çözümü bulunabilir.

$y = y_0(x)$, (1) Riccati denkleminin bir özel çözümü olsun. Böylece

$$y_0' = P(x) + Q(x)\,y_0 + R(x)\,y_0^2 \tag{2}$$

sağlanır. (1) de

$$y = y_0(x) + \frac{1}{u(x)}$$

değişken değiştirmesi uygulanırsa $y' = y_0' - \frac{u'}{u^2}$ olduğundan

$$\begin{aligned} y_0' - \frac{u'}{u^2} &= P(x) + Q(x)\left(y_0 + \frac{1}{u}\right) + R(x)\left(y_0^2 + 2\frac{y_0}{u} + \frac{1}{u^2}\right) \\ \Rightarrow y_0' - \frac{u'}{u^2} &= P(x) + Q(x)\,y_0 + R(x)\,y_0^2 + \frac{1}{u}Q(x) + R(x)\left(2\frac{y_0}{u} + \frac{1}{u^2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. (2) denkleminden

$$\frac{-u'}{u^2} = \frac{Q(x)}{u} + R(x)\left(\frac{2y_0}{u} + \frac{1}{u^2}\right)$$

yazılır. Bu eşitlik düzenlendiğinde

$$u' + (Q(x) + 2y_0 R(x))\,u + R(x) = 0$$

şeklindeki lineer denkleme ulaşılır.

İlk olarak lineer denklemin $u(x)$ çözümü bulunur sonra da

$$y = y_0(x) + \frac{1}{u(x)}$$

de yerine yazılarak Riccati denkleminin çözümü elde edilir.

Örnek 1.

$$y' = \frac{y}{x} + x^3y^2 - x^5$$

denklemini çözünüz.

Çözüm. $y_0 = x$ bir çözümdür.

$y = x + \frac{1}{u(x)}$, $y' = 1 - \frac{u'}{u^2}$ yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{y}{x} + x^3 y^2 - x^5 \\
\Rightarrow 1 - \frac{u'}{u^2} &= \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{u}\right) + x^3\left(x + \frac{1}{u}\right)^2 - x^5 \\
\Rightarrow -\frac{u'}{u^2} &= \frac{1}{x}\frac{1}{u} + \frac{2x^4}{u} + \frac{x^3}{u^2} \\
\Rightarrow u' + \frac{1}{x}u + 2x^4 u + x^3 &= 0 \\
\Rightarrow u' + \left(\frac{1}{x} + 2x^4\right)u &= -x^3 \quad \text{(lineer denklem)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. İntegral çarpanı

$$F(x) = e^{\int\left(\frac{1}{x}+2x^4\right)dx} = e^{\ln x + \frac{2x^5}{5}} = xe^{\frac{2x^5}{5}}$$

dir.

$F(x)\,u = \int F(x)\,q(x)\,dx + C$ olduğundan

$$xe^{\frac{2x^5}{5}}u = \int xe^{\frac{2x^5}{5}}\left(-x^3\right)dx + C = -\int x^4 e^{\frac{2x^5}{5}}dx + C = \frac{-1}{2}e^{\frac{2x^5}{5}} + C$$

ve lineer denklemin çözümü

$$u(x) = -\frac{1}{2x} + \frac{C}{x}e^{-\frac{2x^5}{5}}$$

olur.

$y = x + \frac{1}{u(x)}$ olduğundan Riccati denkleminin genel çözümü

$$y = x + \frac{1}{-\frac{1}{2x} + \frac{C}{x}e^{-\frac{2x^5}{5}}}$$

olarak bulunur.

Problemler

Aşağıdaki diferensiyel denklemleri çözünüz.

a) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{x}y^2 - 2\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)y - x + 1 = 0 \quad ; \; y_1 = ax$

b) $\left(1 - x^3\right)y' - y^2 + x^2 y + 2x = 0 \quad ; \; y_1 = ax^2$

c) $y' + y^2 - (1 + 2e^x)\,y + e^{2x} = 0 \quad ; \quad y_1 = e^{mx}$

d) $y' - y - \frac{2}{x^3}y^2 + x^2 = 0$, $y(1) = 4 \quad ; \quad y_1 = ax^2$

Çözüm:

a) $y_1 = ax \Rightarrow y_1' = a$ denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} a - \frac{1}{x}a^2x^2 - 2\left(\frac{1}{x} - 1\right)ax - x + 1 = 0 \\ \Rightarrow x\left(-a^2 + 2a - 1\right) + (-a + 1) \equiv 0 \\ \Rightarrow -a^2 + 2a - 1 = 0 \ \wedge \ -a + 1 = 0 \\ \Rightarrow a = 1 \end{aligned}$$

olup $y_1 = x$ özel çözümdür.

$y = x + \frac{1}{u(x)}$, $y' = 1 - \frac{u'}{u^2}$ yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{u}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(x + \frac{1}{u}\right) - x + 1 &= 0 \\ \Rightarrow \frac{du}{dx} + \frac{2}{x}u = -\frac{1}{x} \qquad \text{(Lineer denklem)} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada integral çarpanı

$$F(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = x^2$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} F(x)\,u &= \int F(x)\,q(x)\,dx + c \\ \Rightarrow x^2u &= \int x^2\left(-\frac{1}{x}\right)dx + c \\ &= -\frac{x^2}{2} + c \end{aligned}$$

dir. $y = x + \frac{1}{u}$ olduğundan Riccati denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} y &= x + \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{c}{x^2}} \\ \Rightarrow y &= \frac{2x^2 - x^3 + 2cx}{-x^2 + 2c} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

c) $y_1 = e^{mx} \Rightarrow y_1' = me^{mx}$ denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} me^{mx} + e^{2mx} - (1 + 2e^x)e^{mx} + e^{2x} = 0 \\ \Rightarrow (m - 1)e^{mx} - 2e^{(m+1)x} + e^{2x} + e^{2mx} \equiv 0 \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlik $m = 1$ için sağlanır. Böylece özel çözüm $y_1 = e^x$ dir.

$y = e^x + \frac{1}{u(x)}$, $y' = e^x - \frac{u'}{u^2}$ denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} e^x - \frac{1}{u^2}u' + e^{2x} + \frac{2e^x}{u} + \frac{1}{u^2} - e^x - \frac{1}{u} - 2e^{2x} - \frac{2e^x}{u} + e^{2x} &= 0 \\ \Rightarrow u' + u - 1 = 0 \qquad \text{(Değişkenlerine ayrılabilir denklem)} & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{1-u} = dx$$

$$\Rightarrow -\ln(1-u) = x - \ln c$$

elde edilir, böylece ayrılabilir denklemin çözümü

$$u = 1 - ce^{-x}$$

ve $y = e^x + \frac{1}{u}$ olduğundan Riccati denkleminin çözümü

$$y = e^x + \frac{1}{1 - ce^{-x}}$$

$$\Rightarrow y = \frac{e^x - c + 1}{1 - ce^{-x}}$$

olarak bulunur.