2.4.Tam Diferensiyel Denklemler

Tanım. $u = u(x, y)$ fonksiyonu $D \subset \mathbb{R}^2$ bölgesinde sürekli birinci basamaktan türevlere sahip bir fonksiyon olsun. $u = u(x, y)$ fonksiyonunun tam diferensiyeli her $(x, y) \in D$ için

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

ile tanımlanır.

Birinci basamaktan

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0 \tag{1}$$

diferensiyel denklemini ele alalım. $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$ ifadesi bir tam diferensiyel ise (1) denklemine **tam diferensiyel denklem** denir. (1) denkleminin tam diferensiyel olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

olmasıdır. Denklem tam diferensiyel ise öyle bir $u = u(x, y)$ fonksiyonu vardır ki

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= P(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= Q(x, y) \end{aligned}$$

eşitlikleri gerçeklenir. Buradan tam diferensiyel denklemin genel çözümü c keyfi sabit olmak üzere $u(x, y) = c$ olarak bulunur.

Örnek 1. $(e^x \sin y - 2y \sin x)\, dx + (e^x \cos y + 2\cos x)\, dy = 0$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. $P(x, y) = e^x \sin y - 2y \sin x$ ve $Q(x, y) = e^x \cos y + 2\cos x$ olmak üzere

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = e^x \cos y - 2\sin x = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

olduğundan denklem tam diferensiyeldir. Öyle bir $u = u(x, y)$ fonksiyonu vardır ki

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y - 2y \sin x \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y + 2\cos x \tag{3}$$

eşitlikleri gerçeklenir. (2) den x'e göre integral alınırsa

$$u(x, y) = e^x \sin y + 2y \cos x + h(y) \tag{4}$$

elde edilir. (4) eşitliğinin y'ye göre türevi alınıp (3)'e eşitlenirse

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y + 2\cos x + h'(y) = e^x \cos y + 2\cos x$$

den $h'(y) = 0 \rightarrow h(y) = c_1$ olarak bulunur. Buradan tam diferensiyel denklemin genel çözümü $e^x \sin y + 2y\cos x = c$ olarak elde edilir.

Örnek 2. $2x\left(ye^{x^2} - 1\right)dx + e^{x^2}dy = 0$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. $P(x,y) = 2x\left(ye^{x^2} - 1\right)$ ve $Q(x,y) = e^{x^2}$ olmak üzere

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2xe^{x^2} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

sağlandığından denklem tam diferensiyeldir. Öyle bir $u = u(x,y)$ fonksiyonu vardır ki

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\left(ye^{x^2} - 1\right) \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2} \tag{6}$$

eşitlikleri gerçeklenir. (5) dan x'e göre integral alınırsa

$$u(x,y) = ye^{x^2} - x^2 + h(y)$$

elde edilir. Buradan y'ye göre türev alınıp (6)'ye eşitlenirse $h(y) = c_1$ olarak bulunur. $u(x,y) = ye^{x^2} - x^2 + c_1$ olup tam diferensiyel denklemin genel çözümü c keyfi sabit olmak üzere

$$ye^{x^2} - x^2 = c$$

formunda elde edilir.

Örnek 3: $\left(1 + x^2\right)dy + (2xy - \tan x)\,dx = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$P(x,y) = 2xy - \tan x$ ve $Q(x,y) = 1 + x^2$ için $P_y = 2x = Q_x$ olduğundan denklem tamdır. Öyle bir $u(x,y)$ fonksiyonu vardır ki

$$\begin{aligned} u_x &= 2xy - \tan x \\ u_y &= 1 + x^2 \end{aligned}$$

denklemlerini sağlar. Böylece

$$\begin{aligned} u(x,y) &= y + x^2y + h(x) \\ &\Rightarrow u_x = 2xy + h'(x) = 2xy - \tan x \\ &\Rightarrow h'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} \\ &\Rightarrow h(x) = \ln(\cos x) + c_1 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} & u(x,y) = sabit \\ \Rightarrow\ & y + x^2 y + \ln(\cos x) = c \end{aligned}$$

bulunur.