## 2. Operatör Yöntemi

$a_0,\ a_1, ..., a_n$ 'ler reel sabitler ve $a_0 \neq 0$ olmak üzere $n$-yinci basamaktan sabit katsayılı lineer homogen olmayan diferensiyel denklem

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \tag{1}$$

olsun. $D = \dfrac{d}{dx}$ olmak üzere (1) denklemi $D$ türev operatörü yardımıyla

$$L(D)\, y = \left(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1} D + a_n\right) y = f(x)$$

formunda yazılabilir. Buradan $y_p(x)$ özel çözümü

$$y_p(x) = \frac{1}{L(D)} f(x)$$

den bulunur. Bu bölümde $f(x)$ fonksiyonunun bazı özel durumları için özel çözümün nasıl bulunduğunu görelim.

**Teorem 1..** $f(x) = Ae^{ax}$ olsun.

**i)** $L(a) \neq 0$ ise $y_p(x) = A\frac{1}{L(a)} e^{ax}$ dir.

**ii)** $L(a) = 0$ ise $y_p(x) = Ae^{ax} \frac{1}{L(D+a)} e^{0x} = Ae^{ax} \frac{1}{L(D+a)} 1$ dir.

**Örnek 1.** $(D+1)^2 \left(D^2 - 2D - 5\right) y = 3e^{2x} + e^x$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

**Çözüm.** Denklemin bir özel çözümü

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{(D+1)^2 (D^2 - 2D - 5)} \left(3e^{2x} + e^x\right) \\ &= 3\frac{1}{(D+1)^2 (D^2 - 2D - 5)} e^{2x} + \frac{1}{(D+1)^2 (D^2 - 2D - 5)} e^x \\ &= -\frac{3}{45} e^{2x} - \frac{1}{24} e^x \end{aligned}$$

dir.

**Örnek 2.** $(D+1)^2 \left(D^2 - 2D - 5\right) y = e^{-x}$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

**Çözüm.**

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{(D+1)^2 (D^2 - 2D - 5)} e^{-x} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(D+1)^2} e^{-x} \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x} \frac{1}{D^2} 1 \\ &= -\frac{1}{4} x^2 e^{-x} \end{aligned}$$

**Teorem 2.** $f(x) = A\sin(ax+b)$ (yada $\cos(ax+b)$) olsun.

**i)** $L(-a^2) \neq 0$ ise $y_p(x) = A\frac{1}{L(D^2)}\sin(ax+b) = A\frac{1}{L(-a^2)}\sin(ax+b)$ dir.

**ii)** $L(-a^2) = 0$ durumunda ise Euler formülünden $\sin(ax+b) = \operatorname{Im} e^{i(ax+b)}$ ve $\cos(ax+b) = \operatorname{Re} e^{i(ax+b)}$ olduğu dikkate alınıp Teorem 1 uygulanarak özel çözüm bulunur.

**Örnek 3.** $(D^2 - 2D - 5)\,y = 3\cos x$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

$$
\begin{aligned}
y_p(x) &= 3\frac{1}{D^2-2D-5}\cos x \quad , \quad D^2 \to -1 \\
&= -\frac{3}{2}\frac{1}{D+3}\cos x \\
&= -\frac{3}{2}\frac{D-3}{D^2-9}\cos x \quad , \quad D^2 \to -1 \\
&= \frac{3}{20}(D-3)\cos x \\
&= -\frac{3}{20}(\sin x + 3\cos x)
\end{aligned}
$$

**Teorem 3.** $f(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$, $n$-yinci dereceden bir polinom olsun.

$$y_p(x) = \frac{1}{L(D)}\left(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0\right)$$

Bu durumda

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-D} &= 1 + D + D^2 + D^3 + ... \\
\frac{1}{1+D} &= 1 - D + D^2 - D^3 + ...
\end{aligned}
$$

açılımlarından yararlanarak özel çözüm bulunur.

**Örnek 4.** $D^2\left(2D-1\right)y=4x-1$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

$$\begin{aligned}
y_p\left(x\right) &= \frac{1}{D^2\left(2D-1\right)}\left(4x-1\right)\\
&= -\frac{1}{D^2}\left(1+2D+4D^2+...\right)\left(4x-1\right)\\
&= -\frac{1}{D^2}\left(4x+7\right)\\
&= -\frac{1}{D}\left(2x^2+7x\right)\\
&= -\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2\right)
\end{aligned}$$